# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

## Anwendungen der Differential- und Integralrechnung in der Mathematik, der Physik und in anderen Gebieten (Gymnasium und HTL)

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

| | |
|---|---|
| Verfasserin: | Sabrina Langer |
| Matrikel-Nummer: | 0300852 |
| Studienrichtung (lt. Studienblatt): | A 190 406 412 |
| Betreuer: | Mag. Dr. Andreas Ulovec |

Wien, am 30.4.2009

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Vorwort

Die Differential– und Integralrechnung eröffnen in vielerlei Hinsicht Schülern und Schülerinnen neue Welten.

- Erstmals werden die Begriffe „fast Null“ und „Unendlich“, die geschichtlich gesehen lange Zeit hindurch zu Widersprüchen geführt haben, durch den Grenzwertbegriff mathematisch präzise erklärt und verwendet.
- Mit den Begriffen „Folge“ und „Stetigkeit“ werden der Unterschied zwischen diskret und kontinuierlich ablaufenden Prozessen deutlich gemacht und damit Platz für die Diskussion über mathematische Modellbildungen geschaffen.
- Differenzen– und Differentialquotient lenken die Aufmerksamkeit auf das „Durchschnittliche“ und das „Momentane“. Auch hier ist reichlich Platz für die Diskussion über erlebbare Realität und mathematisches Modell.
- Die Bestimmung minimaler bzw. maximaler Werte macht den SchülerInnen deutlich, dass Prozesse in der Wirklichkeit durchaus noch optimierbar sein können. Darin spiegelt sich eine gewisse Dynamik (im Gegensatz zur Statik) wider.
- Dass die Addition unendlich vieler Werte sehr wohl ein endliches Ergebnis liefern kann, stellt ebenso eine neue Erkenntnis dar wie die Tatsache, dass nicht jede angeschriebene Summe auch ausgerechnet werden kann.
- Die Berechnung von Flächeninhalten, Rauminhalten und Bogenlängen sind zwar für elementare Objekte schon bekannt, aber die Methodik für komplizierte Objekte stellt die SchülerInnen vor neue Herausforderungen.
- Dass die Mathematik in den Natur– und Ingenieurwissenschaften Platz findet, ist speziell in diesen Kapiteln deutlich zu sehen.

Differential– und Integralrechnung stellen sich mir als sehr spannende Themen dar, die – wie die Geschichte lehrt – eine lange Entwicklung durchgemacht haben.

Für die meisten SchülerInnen sind diese Kapitel gleichsam die Krönung ihres „mathematischen“ Lebens. Und diese Krönung sollten sie in spannenden Aufgaben erfahren.

# 2. Differentialrechnung

Die Geschichte der Differentialrechnung beginnt für mich nicht erst bei Newton und Leibnitz, sondern schon viel früher. Denn ohne dem Buchstabenrechnen, ohne der graphischen Darstellung von Funktionen und ohne Berechnungen mit dem Differenzenquotienten lässt sich die Differentialrechnung nicht begründen:

- Xenon von Elea (um 450 v.Chr) griff in seinen scharfsinnigen Sophismen (=Spitzfindigkeiten) das „diskrete“ Weltbild der Pythagoräer an. Daher war der Gegensatz „diskret–kontinuierlich“ und damit eine naive Interpretation des Begriffs „Stetigkeit“ schon damals bekannt.
- Jordanus Nemorarius gehörte zu den ersten Mathematikern, die für frei wählbare Zahlen Buchstaben verwendeten und begründete damit die Rechnung mit Variablen mit.
- Der spätere Erzbischof von Canterbury, Thomas Bradwardine (um 1300) behandelte Stetigkeitsfragen.
- Nicolas Oresme (um 1350), später zum Bischof von Lisieux ernannt, stellte erstmals Funktionen graphisch dar und bestimmte die Summen unendlicher Reihen auf rechnerischem oder geometrischem Weg.
- Francois Viete (um 1570) führte erstmals auch für Koeffizienten einer Gleichung Buchstaben ein und begründete damit den Unterschied zwischen Unbekannter und Parameter.
- Pierre de Fermat berechnete Tangenten und Extrema von Kurven unter Verwendung des Differenzenquotienten.
- Christiaan Huygens (um 1660) führte Untersuchungen über Extremwertaufgaben, Tangenten– und Wendepunktsprobleme und behandelte die Theorie des Krümmungsradius sowie Evolute und Evolventen von Kurven.
- Isaac Barrow (um 1680) widmete sich Tangenten– und Quadraturproblemen auf kinematischer Art.

Mit der Differentialrechnung im engeren Sinn werden hauptsächlich folgende Mathematiker in Zusammenhang gebracht:

- Isaac Newton (1643–1727), ein Schüler von Isaac Barrow, schrieb seine Erkenntnisse über Differentialquotienten und Potenzreihen 1669 nieder. Sein Werk wurde aber erst 1711 gedruckt. Er verfeinerte seine Erkenntnisse über die Differential- und Integralrechnung in einem 1671 verfassten Werk, das erst 1736 veröffentlicht wurde. In einer dritten Arbeit (erstellt 1676, gedruckt 1704) finden sich erste Andeutungen des Grenzwertbegriffs.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) entwickelte den Grundgedanken seines Calculus etwa 1675. Bis 1677 führte er einen regen Briefwechsel mit Issac Newton, in dem er (ebenso wie Newton) versuchte, möglichst wenig eigenes Wissen bekannt zu geben und seinen Briefpartner möglichst über dessen Erkenntnisse auszuhorchen. Leibniz schuf um 1676 die bis heute verwendete Symbolik der Differential– und Integralrechnung und veröffentlichte 1684 seine Ergebnisse.
- Um 1685 begann der Streit zwischen Leibniz und Newton, wer der eigentliche Schöpfer der Differentialrechnung wäre. Tatsächlich haben beide unabhängig voneinander die Differentialrechnung begründet.

Damit ist die Geschichte der Differentialrechnung aber noch nicht zu Ende. Während in England die Leibnizsche Denkweise aufgrund des Streits nicht angenommen wurde und die Weiterentwicklung stagnierte, wurde in Europa emsig weitergeforscht:

- Mitglieder der Familie Bernoulli begründeten die Variationsrechnung und begannen die Differentialrechnung in physikalischen und technischen Bereichen anzuwenden.
- Der Adelige De l'Hospital stellte Johann Bernoulli als Hauslehrer ein. De l'Hospitals Publikationen trugen maßgeblich zur Verbreitung der Leibnitzschen Denkweise bei.
- Leonard Euler (1707–1783) gilt als Stammvater der Analysis. Von ihm stammen Bezeichnungen wie $\pi$, e, ... sowie die Schreibweise f(x)=... .
- Jean le Rond d'Alembert (um 1750) definierte erstmals einen (noch unexakten) Grenzwertbegriff und löste damit jene Schwierigkeiten, die sich bei der Deutung der Differentiale als unendlich kleine Größen ergaben, die bisher je nach Bedarf einfach als Null oder Nicht–Null interpretiert wurden.

- Augustin–Louis Cauchy (1789–1867), nach Gauß der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, führte die ε–Betrachtung ein. Damit geht die heute übliche Art die Grundbegriffe der Differential– und Integralrechnung einzu–führen auf Cauchy zurück.
- Mit David Hilbert (1862–1943) soll die Geschichte der Differentialrechnung, soweit sie im Schulunterricht Platz findet, ein Ende haben. Hilbert gilt als letztes Universalgenie, welches die Mathematik in ihrer Gesamtheit noch zu überschauen und beherrschen vermochte.

## 2.1. Lehrplanbezug

### 2.1.1. Lehrplan der 7. Klasse AHS

<u>Differentialrechnung</u>

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate)
- Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung
- weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion
- Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner– und außermathematischen Bereichen
- Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen
- Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktions–untersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen
- bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten
- Ermitteln von Extrem– und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
- Kennen lernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung

### 2.1.2. Lehrplan der 3. Klasse HTL (16 Stunden in 5 Jahrgängen)

Analysis

- Differenzengleichungen
- Zahlenfolgen, Grenzwert, Stetigkeit
- Differentialrechnung
- Differenzen und Differentialquotient
- Ableitungsregeln
- Anwendungen der Differentialrechnung
- Funktionen in zwei unabhängigen Variablen, partielle Ableitung .

Numerische Mathematik

- Fehlerabschätzung und –fortpflanzung, Konditionsproblematik
- numerische Methoden zum Lösen von Gleichungen
- Interpolation

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik .

### 2.1.3. Lehrplan der 4. Klasse HTL (16 Stunden in 5 Jahrgängen)

Analysis

- Funktionenreihen
- Potenzreihen

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik .

### 2.1.4. Lehrplan der 5. Klasse HTL (16 Stunden in 5 Jahrgängen)

Aktuelle Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Fachrichtung

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik .

# 2.2. Kurzabriss Theorie

## 2.2.1. Grenzwert einer Funktion

Die Funktion y=f(x) sei in dem die Stelle $x_0$ enthaltenden offenen Intervall, aber nicht zwingend in $x_0$, definiert. $<x_n>$ sei eine Folge, die nach $x_0$ konvergiert, wobei $x_0 \neq x_n$.

Konvergiert jede Folge $<f(x_n)>$ gegen denselben Grenzwert g, dann nennt man g Grenzwert der Funktion f(x) an der Stelle $x_0$.

Konvergiert $<x_n>$ von rechts zu $x_0$, und $<f(x_n)>$ gegen den Grenzwert $g_{+0}$, dann nennt man $g_{+0}$ den rechtsseitigen Grenzwert.

Konvergiert $<x_n>$ von links zu $x_0$, und $<f(x_n)>$ gegen den Grenzwert $g_{-0}$, dann nennt man $g_{-0}$ den linksseitigen Grenzwert.

## 2.2.2. Stetigkeit

Die Funktion y=f(x) sei in einem die Stelle $x_0$ enthaltenden offenen Intervall definiert. f(x) nennt man an der Stelle $x_0$ stetig, wenn sowohl linksseitiger als auch rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle $x_0$ existieren und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmen. Ist die Funktion in jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig, dann wird sie als stetige Funktion bezeichnet.

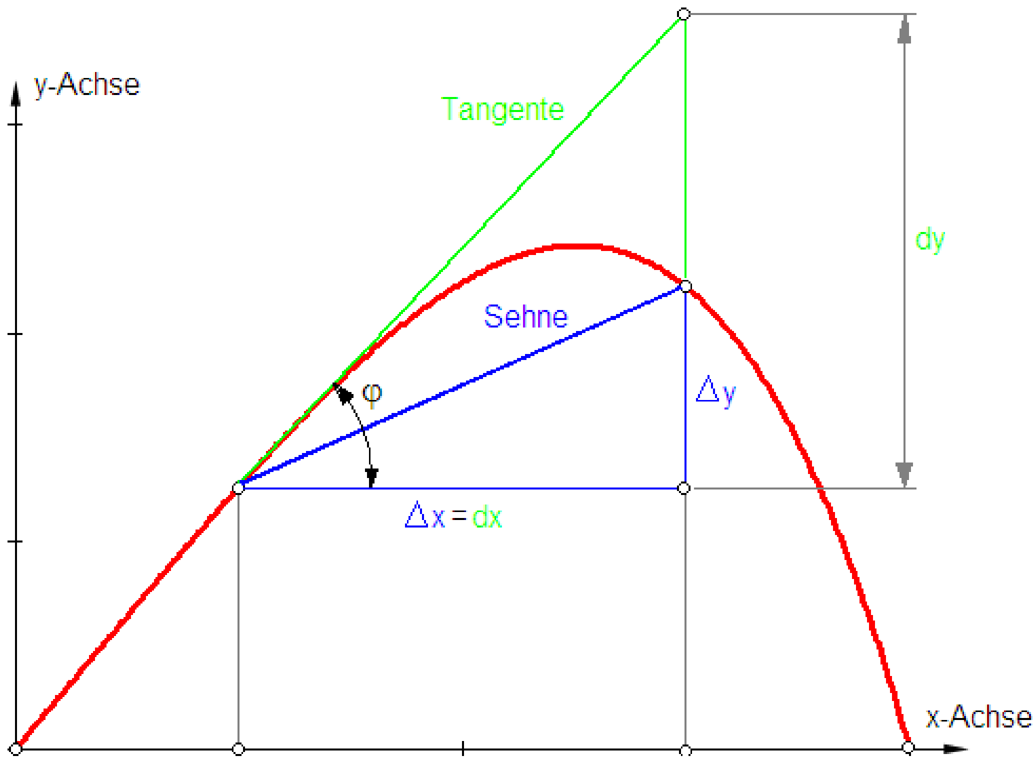
## 2.2.3. Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion y=f(x) nennt man an der Stelle $x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \tan(\varphi)$$

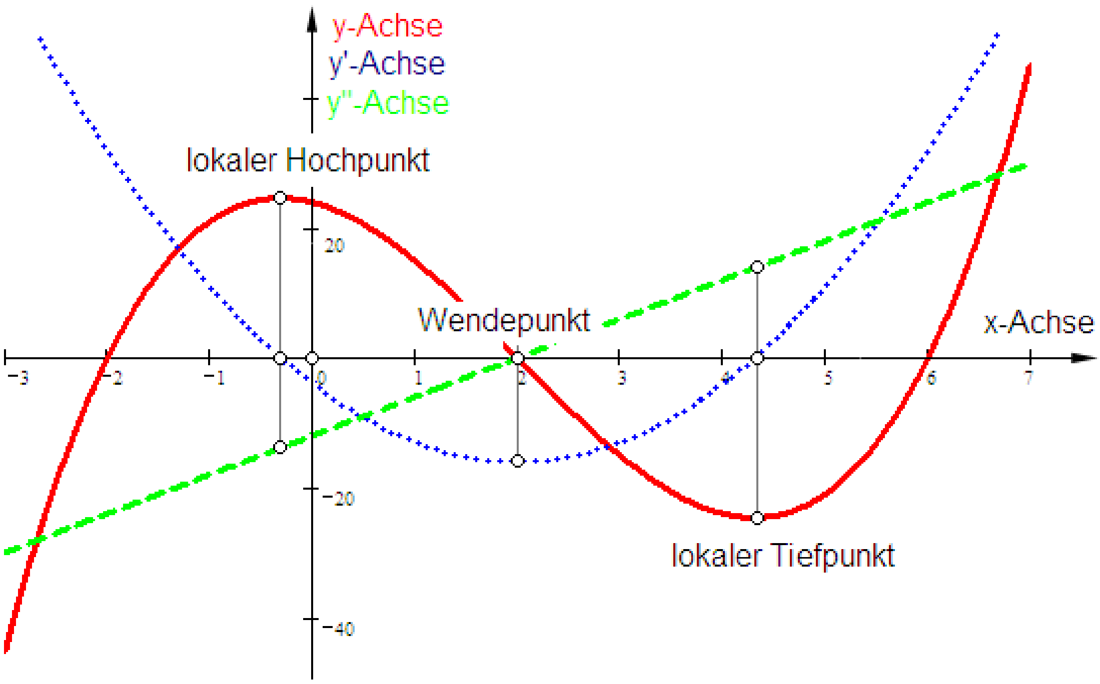
existiert. Den Ausdruck $\Delta y / \Delta x$ nennt man Differenzenquotient, dy/dx Differentialquotient und $\varphi$ ersten Neigungswinkel der Kurve an der Stelle $x_0$.

Der Differenzenquotient kann als Sehnenanstieg, der Differentialquotient als Tangentenanstieg gedeutet werden.




Die zweite Ableitung einer Funktion gibt an, ob eine Funktion links– oder rechtsgekrümmt ist.

## 2.2.4. Extremstellen und Wendepunkte



Lokale Extremstellen $x_0$ haben waagrechte Tangenten und daher gilt $f'(x_0)=0$.

In lokalen Hochpunkten ist die Funktion rechtsgekrümmt, woraus $f''(x_0)<0$ folgt. In lokalen Tiefpunkten führt die Linkskrümmung zu $f''(x_0)>0$.

In Wendepunkten verschwindet die Krümmung, wodurch sich $f''(x_0)=0$ ergibt. Als weitere notwendige Bedingung ergibt sich $f'''(x_0)\neq 0$.

### 2.2.5. Kleine Formelsammlung

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ | $(e^x)' = e^x$ | $(\sin(x))' = \cos(x)$ | $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ |
| | $(1/x)' = \ln(x)$ | $(\cos(x))' = -\sin(x)$ | $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ |

## 2.3. Differenzen- und Differentialquotient

Differenzen– und Differentialquotient sind die zentralen Begriffe der Differential–rechnung.

In diesem Kapitel gibt es zwei prinzipiell wichtige Aspekte zu behandeln, nämlich

- den Übergang vom „Durchschnittlichen“ zum „Momentanen“ sowie
- der Anwendung in praktischen Beispielen.

Nachdem es zu diesen zwei Aspekten bereits viele bekannte Beispiele gibt, habe ich mich bemüht, zwei weitere mathematische Begriffe mithilfe des Differenzen– und Differentialquotienten zu behandeln – nämlich Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius.

Während sich Formeln zur Berechnung des Krümmungsradius in Schulbüchern finden, bleibt eine elementare Herleitung dort leider im Dunklen. Die hinter der Herleitung stehende geometrische Idee stellt aber eine wesentliche Erweiterung des mathematisch–geometrischen Horizonts dar.

<u>Kurz zu den Beispielen:</u>

- In den ersten beiden Beispielen werden Formeln für Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius mithilfe von Grenzübergängen in allgemeiner Rechnung hergeleitet. Dabei bedient man sich einerseits der Streckensymmetralen und im anderen Weg der Kurvennormalen.
- Im dritten Beispiel wird der Krümmungsradius im Parabelscheitel mit konkreten Werten und unter Verwendung der Streckensymmetralen hergeleitet und ein Zusammenhang zum Hochsprung hergestellt.
- Im vierten Beispiel wird der Krümmungsradius in einem lokalen Extremum eines Polynoms 3.Grades mithilfe von Kurvennormalen sowie der Ort der Krümmungsmitten (=Evolute) und der minimale Krümmungsradius bestimmt.

Damit werden beide Herleitungen in praktischen Beispielen mit Zahlenwerten noch einmal durchgeübt und durchgedacht.

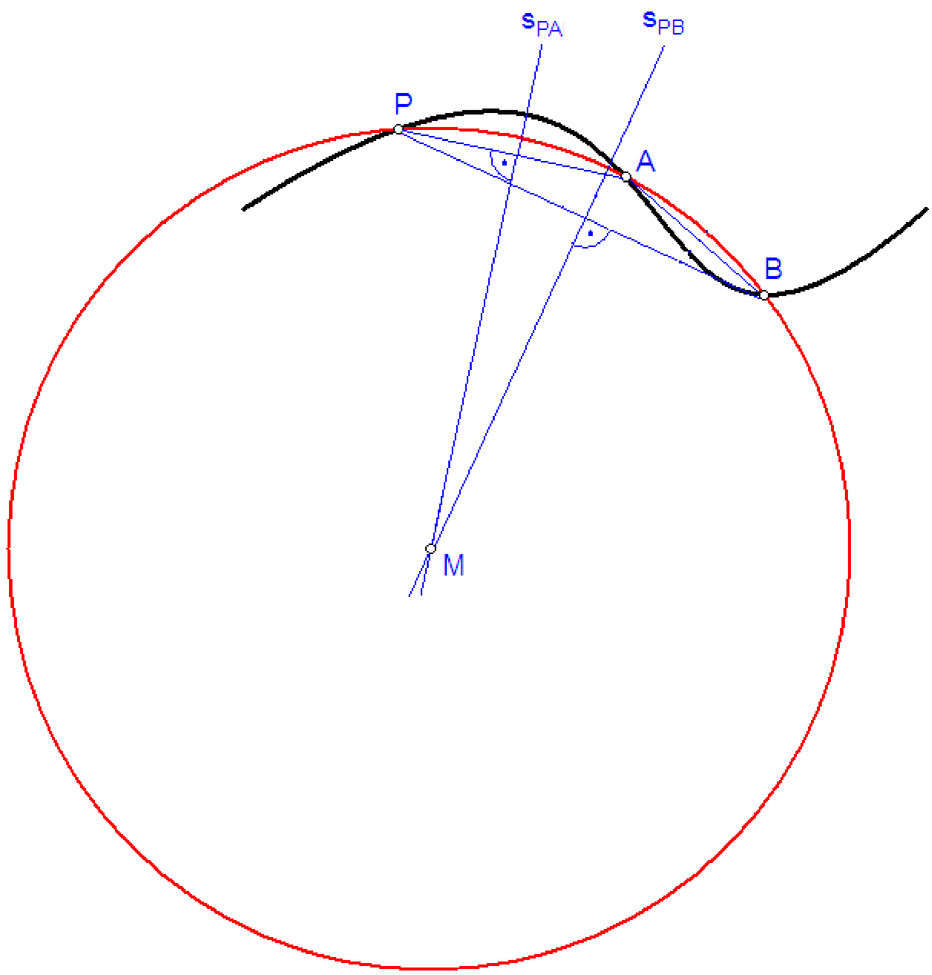
## 2.3.1. Herleitung des Krümmungsradius mit zwei Streckensymmetralen

Aufgabenstellung:

Berechne den Krümmungsradius in einem Kurvenpunkt P mithilfe zweier Strecken–symmetralen.

Lösung:

Man wählt zuerst drei Punkte P, A, B auf der Kurve, die ein Dreieck bilden und bestimmt den Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Streckensymmetralen $s_{PA}$ und $s_{PB}$.




Nähern sich nun A und B dem Punkt P, dann nähert sich der Umkreis des Dreiecks PAB dem Krümmungskreis in P und damit der Umkreismittelpunkt M dem Krümmungsmittelpunkt P* von P.

Zur konkreten Herleitung:

Man betrachtet die drei Kurvenpunkte

$$P=(p/f(p)),\ A=(a/f(a)),\ B=(b/f(b))$$

und bestimmt die Streckensymmetralen $s_{PA}$ und $s_{PB}$:

$$s_{PA}: \qquad M_{PA}=\frac{1}{2}\cdot(P+A)=\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p+a\\ f(p)+f(a)\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AP}=P-A=\begin{pmatrix}p-a\\ f(p)-f(a)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \ Normalvektorform\quad M_{PA}\cdot\overrightarrow{AP}=X\cdot\overrightarrow{AP}$$

$$\Rightarrow\ \ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}p+a\\ f(p)+f(a)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p-a\\ f(p)-f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p-a\\ f(p)-f(a)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \ (p+a)\cdot(p-a)+(f(p)+f(a))\cdot(f(p)-f(a))=2\cdot x\cdot(p-a)+2\cdot y\cdot(f(p)-f(a))$$

Analog ergibt sich

$$s_{PB}: \qquad (p+b)\cdot(p-b)+(f(p)+f(b))\cdot(f(p)-f(b))=2\cdot x\cdot(p-b)+2\cdot y\cdot(f(p)-f(b))$$

Der Schnittpunkt M=(x/y) ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems

$$s_{PA}:\ \ (p+a)\cdot(p-a)+(f(p)+f(a))\cdot(f(p)-f(a))=2\cdot x\cdot(p-a)+2\cdot y\cdot(f(p)-f(a))$$

$$s_{PB}:\ \ (p+b)\cdot(p-b)+(f(p)+f(b))\cdot(f(p)-f(b))=2\cdot x\cdot(p-b)+2\cdot y\cdot(f(p)-f(b))$$

und hat unter der Voraussetzung

$$\begin{vmatrix}2\cdot(p-a) & 2\cdot(f(p)-f(a))\\ 2\cdot(p-b) & 2\cdot(f(p)-f(b))\end{vmatrix}\neq 0$$

die Koordinaten

$$x=\frac{\begin{vmatrix}(p+a)\cdot(p-a)+(f(p)+f(a))\cdot(f(p)-f(a)) & 2\cdot(f(p)-f(a))\\ (p+b)\cdot(p-b)+(f(p)+f(b))\cdot(f(p)-f(b)) & 2\cdot(f(p)-f(b))\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2\cdot(p-a) & 2\cdot(f(p)-f(a))\\ 2\cdot(p-b) & 2\cdot(f(p)-f(b))\end{vmatrix}}=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{((p+a)\cdot(p-a)+(f(p)+f(a))\cdot(f(p)-f(a)))\cdot(f(p)-f(b))-\ldots}{(p-a)\cdot(f(p)-f(b))-(p-b)\cdot(f(p)-f(a))}$$

$$\frac{\ldots-((p+b)\cdot(p-b)+(f(p)+f(b))\cdot(f(p)-f(b)))\cdot(f(p)-f(a))}{(p-a)\cdot(f(p)-f(b))-(p-b)\cdot(f(p)-f(a))} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left((p+a)+(f(p)+f(a))\cdot\frac{f(p)-f(a)}{p-a}\right)\cdot\frac{f(p)-f(b)}{p-b}-\ldots}{\frac{f(p)-f(b)}{p-b}-\frac{f(p)-f(a)}{p-a}}$$

$$\frac{\ldots-\left((p+b)+(f(p)+f(b))\cdot\frac{f(p)-f(b)}{p-b}\right)\cdot\frac{f(p)-f(a)}{p-a}}{\frac{f(p)-f(b)}{p-b}-\frac{f(p)-f(a)}{p-a}}$$

Für A → P, d.h. a → p erhält man damit

$$x = \frac{(2\cdot p+2\cdot f(p)\cdot f'(p))\cdot\frac{f(p)-f(b)}{p-b}-\left((p+b)+(f(p)+f(b))\cdot\frac{f(p)-f(b)}{p-b}\right)\cdot f'(p)}{2\cdot\left(\frac{f(p)-f(b)}{p-b}-f'(p)\right)}$$

Sofortiges B → P, d.h. b → p führt nicht zum Ziel. Statt dessen soll in allen Termen, in denen p und b vorkommen zuerst p → b streben. Dadurch ergibt sich

$$x = \frac{(2\cdot p+2\cdot f(p)\cdot f'(p))\cdot f'(b)-(2\cdot b+2\cdot f(b)\cdot f'(b))\cdot f'(p)}{2\cdot(f'(b)-f'(p))} =$$

$$= \frac{p\cdot f'(b)+f(p)\cdot f'(p)\cdot f'(b)-b\cdot f'(p)-f(b)\cdot f'(b)\cdot f'(p)}{f'(b)-f'(p)} =$$

$$= \frac{p\cdot f'(b)-b\cdot f'(p)-f'(p)\cdot f'(b)\cdot(f(b)-f(p))}{f'(b)-f'(p)} =$$

$$= \frac{p\cdot f'(b)-p\cdot f'(p)+p\cdot f'(p)-b\cdot f'(p)-f'(p)\cdot f'(b)\cdot(f(b)-f(p))}{f'(b)-f'(p)} =$$

$$= \frac{p \cdot (f'(b) - f'(p)) - f'(p) \cdot (b-p) - f'(p) \cdot f'(b) \cdot (f(b) - f(p))}{f'(b) - f'(p)} =$$

$$= p - \frac{f'(p) + f'(p) \cdot f'(b) \cdot \dfrac{f(b) - f(p)}{b-p}}{\dfrac{f'(b) - f'(p)}{b-p}}$$

und durch B → P, d.h. b → p ergeben sich nun aus den übrigen Differenzenquotienten jetzt weitere Differentialquotienten und damit (x → x*, y → y*)

$$x^* = p - \frac{f'(p) + f'^3(p)}{f''(p)} = p - f'(p) \cdot \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}$$

Durch nahezu analoge Rechnung ergibt sich

$$y^* = f(p) + \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}.$$

Den Radius r erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras als

$$r = \sqrt{(x^* - p)^2 + (y^* - f(p))^2} = \sqrt{\left(-f'(p) \cdot \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}\right)^2 + \left(\frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 + f'^2(p)}{|f''(p)|} \cdot \sqrt{1 + f'^2(p)} = \frac{(1 + f'^2(p))^{\frac{3}{2}}}{|f''(p)|}$$

Aus dieser Formel folgt, dass das Vorzeichen der zweiten Ableitung f“(p) eine Aussage über das Krümmungsverhalten mitbringt, aber nicht die Krümmung κ=1/r ist. Durch die Herleitung soll das Thema „Krümmungskreis“ besser verstanden werden.

Zusammenfassend:

Ist eine Funktion f zweimal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem Punkt P=(p/f(p)) mit y“(p)≠0 einen Krümmungsmittelpunkt P*=(x*/y*) mit den Koordinaten

$$x^* = p - f'(p) \cdot \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}$$
$$y^* = f(p) + \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}$$
.

Der Radius des Krümmungskreises in P lautet

$$r_P = \frac{\left(1 + f'^2(p)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|f''(p)\right|}$$

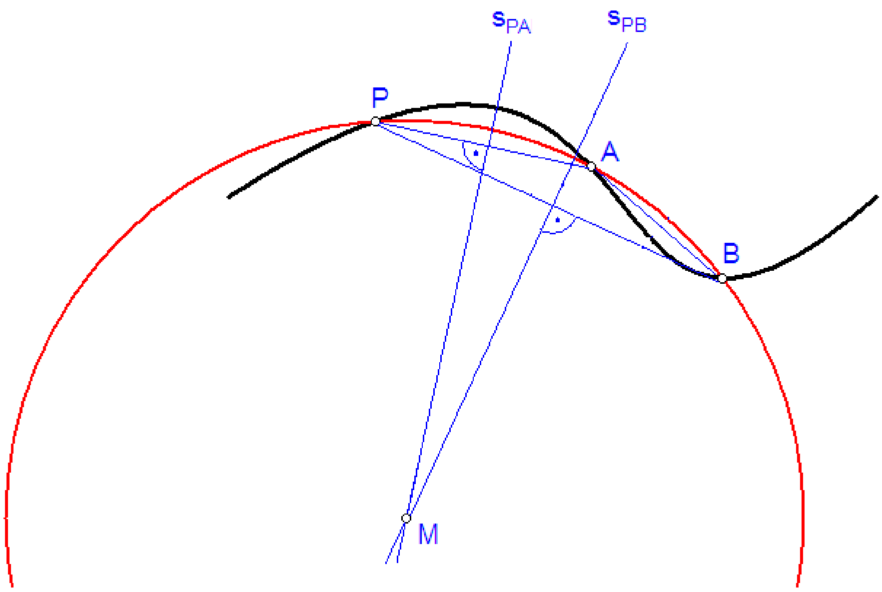
## 2.3.2. Herleitung des Krümmungsradius mithilfe zweier Kurvennormalen

<u>Aufgabenstellung:</u>

Berechne den Krümmungsradius in einem Kurvenpunkt P mithilfe zweier Kurven–normalen.

<u>Lösung:</u>

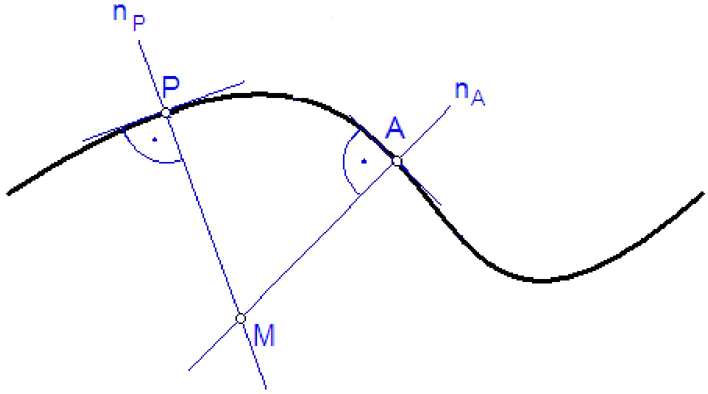
Man wählt zuerst drei Punkte P, A, B auf der Kurve, die ein Dreieck bilden und bestimmt den Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Streckensymmetralen $s_{PA}$ und $s_{PB}$.




Nähern sich nun A und B dem Punkt P, dann nähert sich der Umkreis des Dreiecks PAB dem Krümmungskreis in P und damit der Umkreismittelpunkt M dem Krümmungsmittelpunkt P* von P.

Um die spätere Rechnung zu vereinfachen überlegt man nun weiter:

Wandert B zu A, dann nähert sich die Symmetrale $s_{AB}$ (nicht einge–zeichnet) der Kurvennormalen $n_A$.



Nähert sich der Punkt A statt dessen dem Punkt P, dann nähert sich die Symmetrale $s_{PA}$ der Kurvennormalen $n_P$.

Daher erhält man den Mittelpunkt des Krümmungskreises auch, indem man zuerst zwei Kurvennormalen $n_P$ und $n_A$ miteinander schneidet und danach den Grenzübergang A→P durchführt.

<u>Zur konkreten Herleitung:</u>

Man berechnet allgemein den Krümmungsmittelpunkt P* eines Punktes P. Hat der festgehaltene Punkt P die Koordinaten P=(p/q)=(p/f(p)) und der (variable) Punkt A die Koordinaten A=(a/f(a)), so ergeben sich folgende zwei Kurvennormalen zur Kurve y=f(x):

$$n_P: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ f'(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad x = p + f'(p) \cdot (q - y)$$

$$n_A: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad x = a + f'(a) \cdot (f(a) - y)$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich jetzt

$$p + f'(p) \cdot (q - y) = a + f'(a) \cdot (f(a) - y)$$

und Formelumformungen führen zu

$$p - a + f'(p) \cdot q - f'(a) \cdot f(a) = y \cdot (f'(p) - f'(a))$$

Für f'(p)≠f'(a) - bei „=“ wären die Kurvennormalen parallel zueinander – erhält man damit

$$y = \frac{p - a + f'(p) \cdot q - f'(a) \cdot f(a)}{f'(p) - f'(a)}$$

und um den Grenzübergang a→p durchführen zu können wird kreativ gerechnet, d.h. im zweiten Schritt ergänzt man den Nenner mit dem Term

$$- f'(p) \cdot f(a) + f'(p) \cdot f(a)$$

und erhält somit

$$y=\frac{p-a+f'(p)\cdot q-f'(a)\cdot f(a)}{f'(p)-f'(a)}=$$

$$=\frac{1}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}+\frac{f'(p)\cdot q-f'(p)\cdot f(a)+f'(p)\cdot f(a)-f'(a)\cdot f(a)}{f'(p)-f'(a)}=$$

$$=\frac{1}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}+\frac{f'(p)\cdot(q-f(a))}{f'(p)-f'(a)}+\frac{f(a)\cdot(f'(p)-f'(a))}{f'(p)-f'(a)}=$$

$$=\frac{1}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}+\frac{q-f(a)}{f'(p)-f'(a)}\cdot f'(p)+f(a)=$$

$$=\frac{1}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}+\frac{\frac{q-f(a)}{p-a}}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}\cdot f'(p)+f(a)$$

Setzt man voraus dass alle in der Folge auftretenden Grenzwerte existieren dann ergibt der Grenzübergang die y-Koordinate des Krümmungsmittelpunkts P*:

$$y^*=\lim_{a\to p}\left(\frac{1}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}+\frac{\frac{q-f(a)}{p-a}}{\frac{f'(p)-f'(a)}{p-a}}\cdot f'(p)+f(a)\right)=$$

$$=\frac{1}{f''(p)}+\frac{f'(p)}{f''(p)}\cdot f'(p)+q=f(p)+\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}$$

Einsetzen in die Gleichung der Normalen durch P ergibt die x-Koordinate als

$$x^*=p+f'(p)\cdot(q-y)=p+f'(p)\cdot\left(q-f(p)-\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}\right)=p-f'(p)\cdot\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}$$

Den Radius $r_P$ erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras als

$$r_P = \sqrt{(x^* - p)^2 + (y^* - q)^2} = \sqrt{\left(-f'(p)\cdot\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}\right)^2 + \left(\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}\right)^2} =$$

$$= \frac{1+f'^2(p)}{|f''(p)|}\cdot\sqrt{1+f'^2(p)} = \frac{\left(1+f'^2(p)\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(p)|}$$

Aus diesem Zusammenhang lässt sich folgern, dass das Vorzeichen der zweiten Ableitung f“(p) – wie auch im Schulunterricht betont – eine Aussage über das Krümmungsverhalten mitbringt, aber nicht die Krümmung κ=1/r ist. Indem der Radius r hier hergeleitet wird, soll es möglich sein, den Themenbereich „Krümmungskreis“ besser zu verstehen.

Zusammenfassend:

Ist eine Funktion f zweimal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem Punkt P=(p/f(p)) mit y“(p)≠0 einen Krümmungsmittelpunkt P*. Dieser hat die Koordinaten

$$x^* = p - f'(p)\cdot\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}$$
$$y^* = f(p) + \frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}$$
.

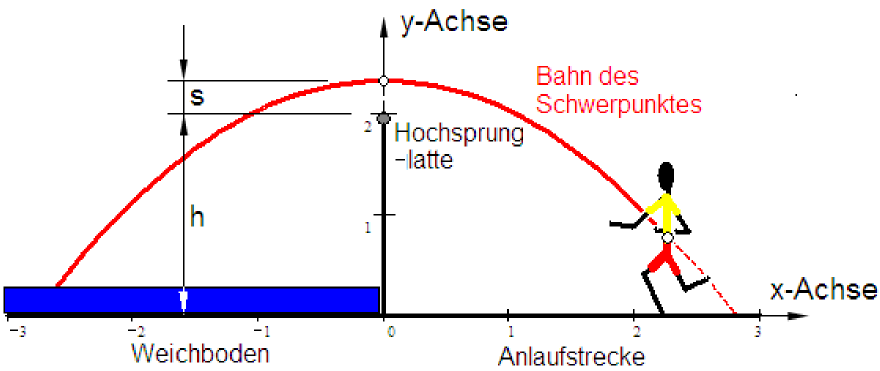
Der Radius des Krümmungskreises in P lautet

$$r_P = \frac{\left(1+f'^2(p)\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(p)|}$$

## 2.3.3. Western Roll

Aufgabenstellung:

Ein Hochspringer über–springt eine in Höhe h montierte Hochsprung–latte (Messung bis zur Oberkante) im „Western Roll".




Während des Laufens soll sich der Körperschwerpunkt des Hochspringers 0.9 m über dem Boden befinden.

a) Wie lautet die Gleichung der Schwerpunktbahn f(x), wenn er zum spätestmöglichen Zeitpunkt abspringen und sein Körperschwerpunkt S einen Sicherheitsabstand s zur Latte einhält?

b) Wie weit von der Latte entfernt muss er dann abspringen?

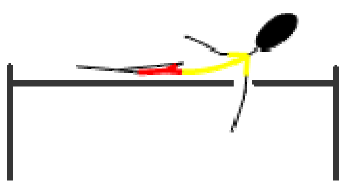
Verwende zur Lösung die Funktionsdarstellung

$$f(x) = -a \cdot x^2 + b, \quad a > 0, b > 0$$

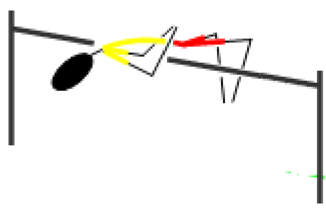
sowie die Maße h=1.5m und s=0.3m. Um die Aufgabe zu vereinfachen wird der Durchmesser der Latte mit 0m angenommen.

Anmerkung:

Beim „Western Roll" handelt es sich um eine Hochsprungtechnik, bei der sich der Springer sich im Moment der Lattenüberquerung in Rückenlage und parallel zur Latte befindet. Die maximal übersprungene Höhe beträgt 2.07m.



Beim Fosbury-Flop wird die Latte auch in Rückenlage überquert, aber der Körper befindet sich quer zur Latte.

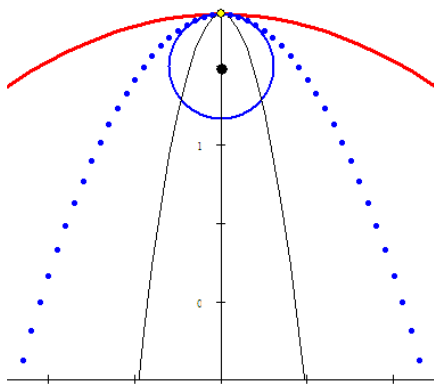


Beim Fosbury-Flop liegt der Schwerpunkt während der Lattenüberquerung ein paar Zentimeter unterhalb der Latte. Die maximal übersprungene Höhe beträgt 2.40m.

Lösung:

a) Überquert der Hochspringer die Latte mit Sicherheitsabstand s, dann darf die Schwerpunktskurve einen um die Latte gedachten Kreis (räumlich betrachtet eigentlich einen Drehzylinder) mit Radius s nicht schneiden sondern nur berühren.

Damit ist dieser Kreis zugleich Scheitelkrümmungskreis im Parabelscheitel P und s zugleich Krümmungsradius in P.



Die Abbildung verdeutlicht die Situation: Die blaue gepunktete Kurve stellt die Schwerpunktlage bei spätestmöglichem günstigen Absprung dar, die dicke rote Volllinie die Lage bei frühem Absprung und die dünne schwarze Volllinie die Lage bei zu spätem Absprung.

Unter Berücksichtigung der Angaben h=1.5m und s=0.3m erhält man den Kurvenscheitel

$$P = (0/h + s) = (0/1.8)$$

und dadurch ergibt sich die Konstante b in

$$f(x) = -a \cdot x^2 + b$$

unmittelbar als

$$f(0) = -a \cdot 0^2 + b = h + s \quad \Rightarrow \quad b = 1.8$$

Um den Krümmungskreis im Scheitel P zu bestimmen betrachten wir zwei weitere beliebig gewählte Parabelpunkte

$$A = (\Delta a / f(\Delta a)) = (\Delta a / -a \cdot (\Delta a)^2 + 1.8)$$

$$B = (\Delta b / f(\Delta b)) = (\Delta b / -a \cdot (\Delta b)^2 + 1.8).$$

Wir bestimmen die Streckensymmetralen $s_{PA}$ und $s_{PB}$ unter Verwendung der Normalvektorform

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$

einer Geraden.

$$s_{PA}: \quad M_{PA} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \Delta a \\ -a \cdot (\Delta a)^2 + 3.6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} \Delta a \\ -a \cdot (\Delta a)^2 \end{pmatrix},$$
$$\Rightarrow \; 2 \cdot \Delta a \cdot x - 2 \cdot a \cdot (\Delta a)^2 \cdot y = (\Delta a)^2 + a^2 \cdot (\Delta a)^4 - 3.6 \cdot a \cdot (\Delta a)^2$$

$$s_{PB}: \quad M_{PB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \Delta b \\ -a \cdot (\Delta b)^2 + 3.6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} \Delta b \\ -a \cdot (\Delta b)^2 \end{pmatrix},$$
$$\Rightarrow \; 2 \cdot \Delta b \cdot x - 2 \cdot a \cdot (\Delta b)^2 \cdot y = (\Delta b)^2 + a^2 \cdot (\Delta b)^4 - 3.6 \cdot a \cdot (\Delta b)^2$$

Der Schnittpunkt dieses beiden Geraden hat für

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot \Delta a & -2 \cdot a \cdot (\Delta a)^2 \\ 2 \cdot \Delta b & -2 \cdot a \cdot (\Delta b)^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

die Koordinaten

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (\Delta a)^2 + a^2 \cdot (\Delta a)^4 - 3.6 \cdot a \cdot (\Delta a)^2 & -2 \cdot a \cdot (\Delta a)^2 \\ (\Delta b)^2 + a^2 \cdot (\Delta b)^4 - 3.6 \cdot a \cdot (\Delta b)^2 & -2 \cdot a \cdot (\Delta b)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 \cdot \Delta a & -2 \cdot a \cdot (\Delta a)^2 \\ 2 \cdot \Delta b & -2 \cdot a \cdot (\Delta b)^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-2}{-4} \cdot \frac{\left((\Delta a)^2 + a^2 \cdot (\Delta a)^4 - 3.6 \cdot a \cdot (\Delta a)^2\right) \cdot a \cdot (\Delta b)^2 - \left((\Delta b)^2 + a^2 \cdot (\Delta b)^4 - 3.6 \cdot a \cdot (\Delta b)^2\right) \cdot a \cdot (\Delta a)^2}{\Delta a \cdot a \cdot (\Delta b)^2 - \Delta b \cdot a \cdot (\Delta a)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 + a^2 \cdot (\Delta a)^2 - 3.6 \cdot a\right) \cdot a \cdot (\Delta a)^2 \cdot (\Delta b)^2 - \left(1 + a^2 \cdot (\Delta b)^2 - 3.6 \cdot a\right) \cdot a \cdot (\Delta a)^2 \cdot (\Delta b)^2}{\Delta a \cdot a \cdot (\Delta b)^2 - \Delta b \cdot a \cdot (\Delta a)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 + a^2 \cdot (\Delta a)^2 - 3.6 \cdot a\right) \cdot \Delta a \cdot \Delta b - \left(1 + a^2 \cdot (\Delta b)^2 - 3.6 \cdot a\right) \cdot \Delta a \cdot \Delta b}{\Delta b - \Delta a} =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta a\cdot\Delta b+a^2\cdot(\Delta a)^3\cdot\Delta b-3.6\cdot a\cdot\Delta a\cdot\Delta b-\Delta a\cdot\Delta b-a^2\cdot(\Delta b)^3\cdot\Delta a+3.6\cdot a\cdot\Delta a\cdot\Delta b}{\Delta b-\Delta a}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\cdot(\Delta a)^3\cdot\Delta b-a^2\cdot(\Delta b)^3\cdot\Delta a}{\Delta b-\Delta a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\cdot\Delta a\cdot\Delta b\cdot\left((\Delta a)^2-(\Delta b)^2\right)}{\Delta b-\Delta a}=\frac{-1\cdot a^2\cdot\Delta a\cdot\Delta b}{2}$$

Die beiden Grenzübergänge Δa→0, Δb→b liefern das in diesem Beispiel triviale Ergebnis x=0. Die Berechnung der y-Koordinaten liefert ein spannenderes Ergebnis:

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2\cdot\Delta a & (\Delta a)^2+a^2\cdot(\Delta a)^4-3.6\cdot a\cdot(\Delta a)^2\\ 2\cdot\Delta b & (\Delta b)^2+a^2\cdot(\Delta b)^4-3.6\cdot a\cdot(\Delta b)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2\cdot\Delta a & -2\cdot a\cdot(\Delta a)^2\\ 2\cdot\Delta b & -2\cdot a\cdot(\Delta b)^2\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{2}{-4}\cdot\frac{\Delta a\cdot\left((\Delta b)^2+a^2\cdot(\Delta b)^4-3.6\cdot a\cdot(\Delta b)^2\right)-\Delta b\cdot\left((\Delta a)^2+a^2\cdot(\Delta a)^4-3.6\cdot a\cdot(\Delta a)^2\right)}{a\cdot\Delta a\cdot\Delta b\cdot(\Delta b-\Delta a)}=$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{\left(\Delta b+a^2\cdot(\Delta b)^3-3.6\cdot a\cdot\Delta b\right)-\left(\Delta a+a^2\cdot(\Delta a)^3-3.6\cdot a\cdot\Delta a\right)}{a\cdot(\Delta b-\Delta a)}=$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{(\Delta b-\Delta a)+a^2\cdot\left((\Delta b)^3-(\Delta a)^3\right)-3.6\cdot a\cdot(\Delta b-\Delta a)}{a\cdot(\Delta b-\Delta a)}=$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{(\Delta b-\Delta a)\cdot\left(1+a^2\cdot\left((\Delta b)^2+\Delta b\cdot\Delta a+(\Delta a)^2\right)-3.6\cdot a\right)}{a\cdot(\Delta b-\Delta a)}=$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1+a^2\cdot\left((\Delta b)^2+\Delta b\cdot\Delta a+(\Delta a)^2\right)-3.6\cdot a}{a}$$

Die beiden Grenzübergänge Δa→0, Δb→b liefern nun

$$y^*=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1-3.6\cdot a}{a}=1.8-\frac{1}{2\cdot a}.$$

Damit hat der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels P=(0/1.8) die Koordinaten

$$P^* = \left(0 \middle/ 1.8 - \frac{1}{2 \cdot a}\right)$$

und daher lautet der Scheitelkrümmungsradius

$$r_P = \left|\overrightarrow{PP^*}\right| = \frac{1}{2 \cdot a}.$$

Nachdem der Radius aber auch gleich dem Sicherheitsabstand s sein soll, erhält man

$$s = r_P \quad \Rightarrow \quad 0.3 = \frac{1}{2 \cdot a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{3}.$$

Daher lautet die Schwerpunktgleichung

$$f(x) = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + \frac{9}{5}.$$

b) Um den Absprungpunkt zu errechnen, schneidet man die Schwerpunktkurve mit der waagrechten Geraden y=0.9, auf der der Schwerpunkt des Hochspringers während des Anlaufs liegt:

$$\frac{9}{10} = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{27}{50}} \approx \pm 0.74$$

Die negative Lösung scheidet aus, da sich der Hochspringer dann schon in der Landephase befindet. Daher ist der letztmögliche günstige Absprungpunkt etwa 0.74m vom Hindernis entfernt.

<u>Antwort:</u>

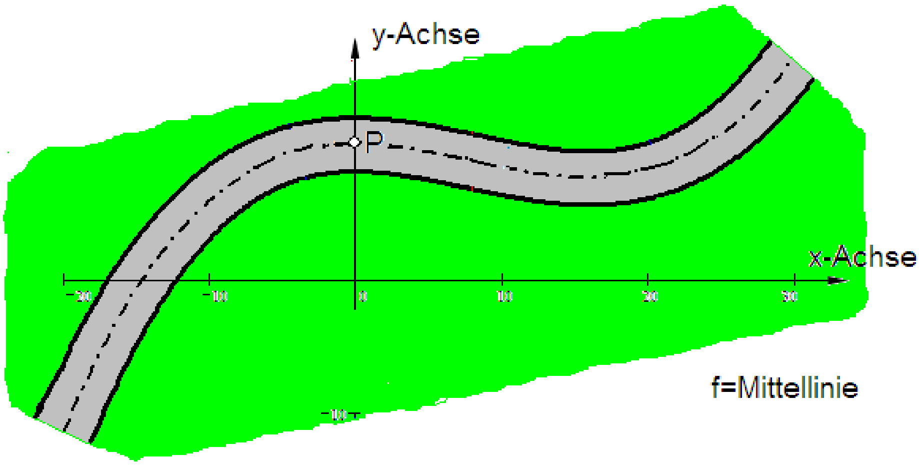
Die Schwerpunktgleichung lautet

$$f(x) = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + \frac{9}{5}$$

Der letztmögliche günstige Absprungpunkt ist etwa 0.74m vom Hindernis entfernt.

## 2.3.4. Wendekreis eines Sattelschleppers

Aufgabenstellung:




Ein Fahrzeuglenker soll einen Sattelschlepper mit Wendekreisradius 14m entlang einer Straße lenken, deren Mittellinie näherungs–weise durch folgende Funktion beschrieben werden kann

$$f(x) = \frac{5}{4096} \cdot x^3 - \frac{15}{512} \cdot x^2 + 10, \quad x \in [-20;30]$$

a) Welchen Radius hat die Straße im Punkt P?

b) Kann der Fahrzeuglenker die Straße abfahren oder gibt es „zu enge Kurven"?

Bemerkung:

Der Wendekreis ist jener kleinste Kreis, den ein Fahrzeug bei maximalem Lenkereinschlag noch fahren kann. Sein Radius wird vom Mittelpunkt bis zu dem am weiters entfernten Teil des Fahrzeugs gemessen.

Fährt das Fahrzeug entlang einer Kurve, dann befinden sich je nachdem ob es sich um eine Recht– oder Linkskurve handelt der linke bzw. rechte Teil des Fahrzeugs auf dem Wendekreis. Um das Beispiel zu vereinfachen nimmt man an, dass die entfernte Seite des Fahrzeugs sich immer auf der Mittellinie der Straße befindet.

Lösung:

a) Man legt zuerst zwei Kurvennormalen $n_P$, $n_A$ in P=(0/f(0))=(0/10) sowie in einem allgemeinen Kurvenpunkt A=(a/f(a)) fest und bestimmt den Schnittpunkt M beider Normalen. Führt man den Grenzübergang a→0 durch, dann nähert sich M dem Mittelpunkt P* des Krümmungskreises in P.

Zur Bestimmung der Kurvennormalen bestimmen wir zuerst den Anstieg der Kurventangente durch die erste Ableitung

$$f(x)=\frac{5}{4096}\cdot x^3-\frac{15}{512}\cdot x^2+10 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{15}{4096}\cdot x^2-\frac{15}{256}\cdot x\ ,$$

womit

$$\begin{aligned} &P:\quad f'(0)=0 \\ &A: f'(a)=\frac{15}{4096}\cdot a^2-\frac{15}{256}\cdot a=\frac{15}{4096}\cdot a\cdot(a-16) \end{aligned}$$

und berechnen unter Verwendung der Normalvektorform einer Geraden

$$\begin{aligned} &n_P:\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} \\ &n_A:\ \begin{pmatrix}1\\ \frac{15}{4096}\cdot a\cdot(a-16)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{15}{4096}\cdot a\cdot(a-16)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\f(a)\end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Gleichungen beider Kurvennormalen als

$$\begin{aligned} &n_P:\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad x^*=0 \ \ wegen\ \ x\to 0 \\ &n_A:\ 4096\cdot x+15\cdot a\cdot(a-16)\cdot y=4096\cdot a+15\cdot a\cdot(a-16)\cdot f(a) \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt M(0/y) ist nach Einsetzen von x=0 durch

$$4096\cdot 0+15\cdot a\cdot(a-16)\cdot y=4096\cdot a+15\cdot a\cdot(a-16)\cdot f(a)$$

festgelegt; seine y–Koordinate ergibt sich nach Formelumstellungen als

$$y=\frac{4096\cdot a+15\cdot a\cdot(a-16)\cdot f(a)}{15\cdot a\cdot(a-16)}=\frac{4096}{15\cdot(a-16)}+f(a)\ .$$

Setzt man jetzt auch noch

$$f(a)=\frac{5}{4096}\cdot a^3-\frac{15}{512}\cdot a^2+10$$

ein, dann ergibt sich die y–Koordinate des Schnittpunkts in alleiniger Abhängigkeit von a als

$$y = \frac{4096}{15 \cdot (a-16)} + \frac{5}{4096} \cdot a^3 - \frac{15}{512} \cdot a^2 + 10$$

und der Grenzübergang a→0 liefert endlich die Lösung

$$y^* = \frac{4096}{-15 \cdot 16} + 10 = -\frac{256}{15} + 10 = -\frac{106}{15} \approx -7.07$$

Damit kann man aus den Koordinaten des Punktes P sowie seines Krümmungsmittelpunktes P* den Radius des Krümmungskreises berechnen:

$$r_P = \left|\overrightarrow{PP^*}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-0 \\ -7.07-10 \end{pmatrix}\right| = 17.07$$

b) Um die zweite Frage zu beantworten, betrachtet man die in 2.3.1. bzw. 2.3.2. hergeleiteten Formeln für Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius.

Für jeden Kurvenpunkt Q=(p/f(p)) mit f“(p)≠0 existiert einen Krümmungsmittelpunkt Q* mit den Koordinaten

$$x^* = p - f'(p) \cdot \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}$$
$$y^* = f(p) + \frac{1 + f'^2(p)}{f''(p)}$$

Der Radius des Krümmungskreises in Q lautet

$$r_Q = \frac{\left(1 + f'^2(p)\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(p)|}$$

Nun betrachten wir konkret die Funktion

$$f(x) = \frac{5}{4096} \cdot x^3 - \frac{15}{512} \cdot x^2 + 10$$

und berechnen zunächst den Ort aller Krümmungsmittelpunkte (= Evolute) und danach die Krümmungsradien in Abhängigkeit von x.

$$f(x)=\frac{5}{4096}\cdot x^3-\frac{15}{512}\cdot x^2+10 \quad\Rightarrow\quad f(p)=\frac{5}{4096}\cdot p^3-\frac{15}{512}\cdot p^2+10$$

$$f'(x)=\frac{15}{4096}\cdot x^2-\frac{15}{256}\cdot x \quad\Rightarrow\quad f'(p)=\frac{15}{4096}\cdot p^2-\frac{15}{256}\cdot p$$

$$f''(x)=\frac{15}{2048}\cdot x-\frac{15}{256} \quad\Rightarrow\quad f''(p)=\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}$$

Einsetzen führt, wie man sieht, zu recht komplizierten Termen

$$x^*=x^*(p)=p-f'(p)\cdot\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}=p-\left(\frac{15}{4096}\cdot p^2-\frac{15}{256}\cdot p\right)\cdot\frac{1+\left(\frac{15}{4096}\cdot p^2-\frac{15}{256}\cdot p\right)^2}{\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}}$$

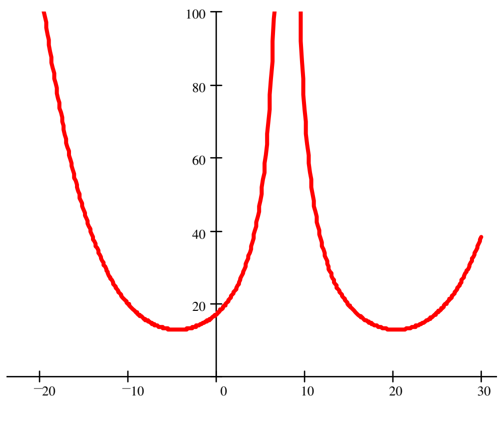
$$y^*=y^*(p)=f(p)+\frac{1+f'^2(p)}{f''(p)}=\frac{5}{4096}\cdot p^3-\frac{15}{512}\cdot p^2+10+\frac{1+\left(\frac{15}{4096}\cdot p^2-\frac{15}{256}\cdot p\right)^2}{\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}}$$

Der Radius lautet dann

$$r_Q=r_Q(p)=\frac{\left(1+f'^2(p)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|f''(p)\right|}=\frac{\left(1+\left(\frac{15}{4096}\cdot p^2-\frac{15}{256}\cdot p\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}\right|}$$

Auf weiteres händisches Vereinfachen wird hier verzichtet.

Der minimale Krümmungsradius wird als Tiefpunkt der Radiusfunktion $r_Q$. Dabei wird der Betrag in der Rechnung zuerst weggelassen und es ergibt sich die Funktion $\tilde{r}_Q$, von der die lokalen Extremstellen gesucht werden. Die Kurvenpunkte mit extremem Krümmungsradius sind die Scheitel $S_1$ und $S_2$ der Kurve. Die Abbildung zeigt $r_Q$.



Als erhält man für lokale Extremstellen die Bedingung

$$\tilde{r}_Q(p)=\frac{\left(1+\left(\frac{15}{4096}\cdot p^{2}-\frac{15}{256}\cdot p\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{r}_Q'(p)=0$$

und mittels MathCad zwei Lösungen

$$p=1 \qquad wurzel\left[\frac{d}{dp}\frac{\left[1+\left(\frac{15}{4096}\cdot p^{2}-\frac{15}{256}\cdot p\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}},p\right]=-4.394$$

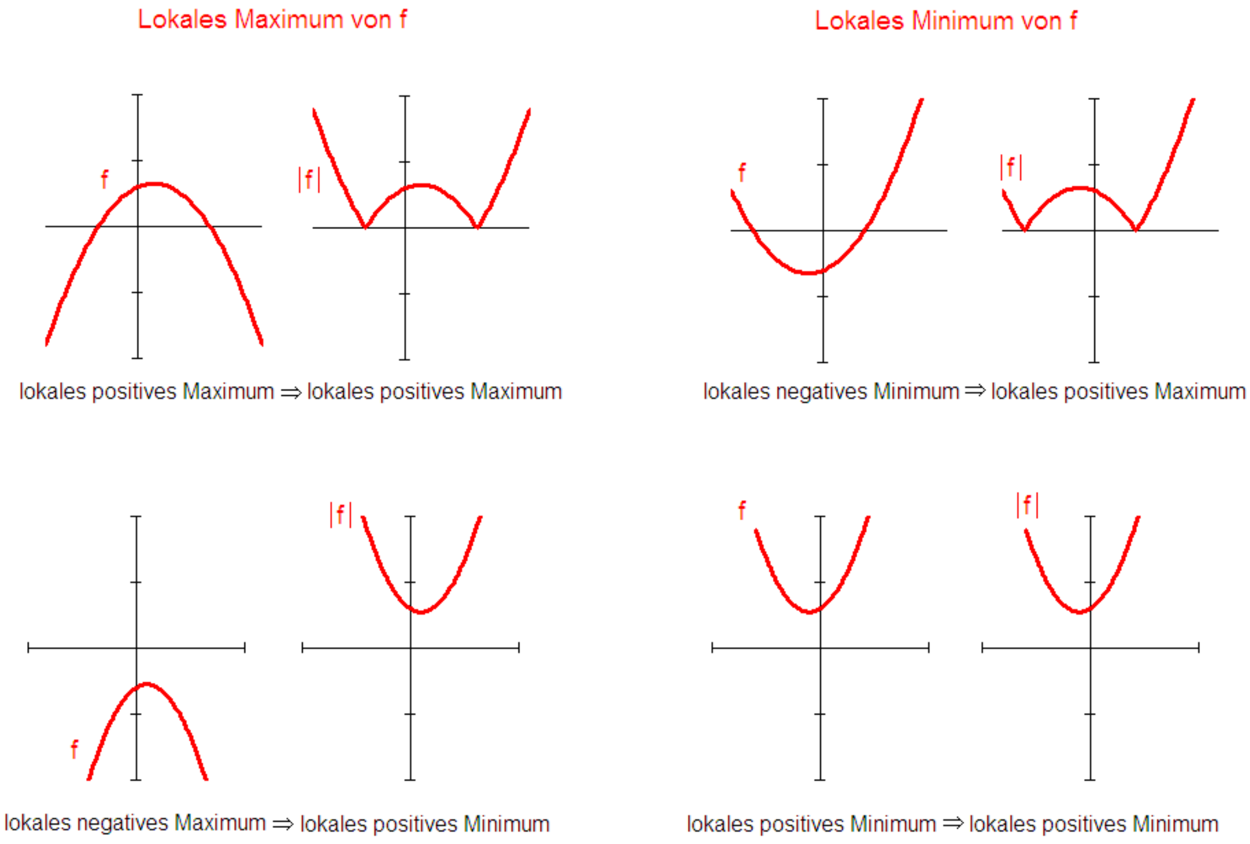
und

$$p=100 \qquad wurzel\left[\frac{d}{dp}\frac{\left[1+\left(\frac{15}{4096}\cdot p^{2}-\frac{15}{256}\cdot p\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{15}{2048}\cdot p-\frac{15}{256}},p\right]=20.394$$

von denen sich p= –4.394 wegen $\tilde{r}_Q''(-4.394)=-0.398$ als lokales Maximum von $\tilde{r}_Q$ und p= –20.394 wegen $\tilde{r}_Q''(20.394)=0.398$ als lokales Minimum von $\tilde{r}_Q$ herausstellt.

Wegen $\tilde{r}_Q(-4.394)=-12.843$ und $\tilde{r}_Q(20.394)=12.843$ handelt es sich bei p= –20.394 in Hinblick auf $\tilde{r}_Q$ um ein „negatives lokales Maximum“, welches durch den Betrag in $r_Q$ zu einem „positivem lokales Minimum“ gemacht wird. p= 20.394 ist „positives lokales Minimum“ von $r_Q$.

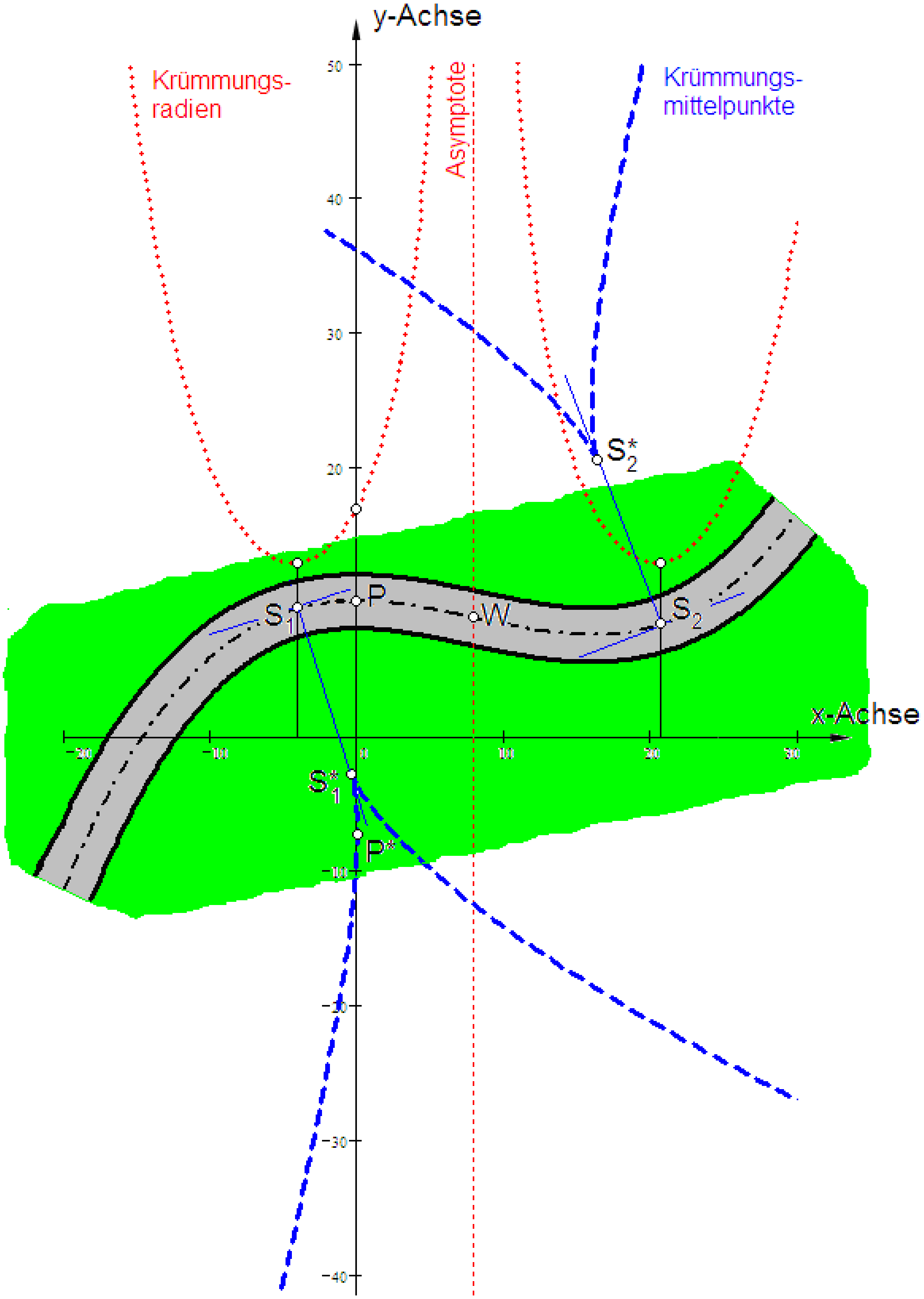
Folgendes Diagramm zeigt die Auswirkung des Betrags auf lokale Extremstellen.




Die Randstellen x= –20 und x=30 sind wegen $r_Q(-20)=109.35$ und $r_Q(30)=38.32$ keine Randminima.

Damit ist der kleinste Radius der Straße etwa 12.9m.

Abschließend ein Diagramm, welches Kurve, Evolute und Krümmungsradien zeigt:



Der Wendepunkt W der Straßenlinie liegt – wie man aus

$$f''(x) = \frac{15}{2048} \cdot x - \frac{15}{256} = 0 \qquad\qquad f'''(x) = \frac{15}{2048} \neq 0$$

leicht sehen kann – bei x=8. Dort ist der Krümmungsradius $r_W=\infty$ und die Kurve der Krümmungsradien hat in x=8 eine y–parallele Asymptote.

<u>Antwort:</u>

Der Kurvenradius (Krümmungsradius der Kurve) im Punkt P beträgt etwa 17m. Der minimale Kurvenradius beträgt etwa 12.9m weshalb der Sattelschlepper diese Straße nicht bis zum Ende durchfahren kann.

## 2.4. Kurvendiskussion und Umkehrung

Bei der Kurvendiskussion handelt es sich um eine Untersuchung der Eigenschaften einer Kurve mithilfe der Differentialrechnung. Kurvendiskussionen werden oft nach „Kochrezept“ behandelt, wodurch die eigentliche Bedeutung und Interpretation nicht selten im Dunkeln bleibt. Damit das nicht passiert werden im Folgenden nicht immer alle Eigenschaften untersucht, sondern nur jene, die für das jeweilige Beispiel interessant sind. Zum Beispiel ist es nicht sinnvoll bei Polynomfunktionen 2.Grades (Parabeln) Wendepunkte zu suchen, da es solche bei diesen konkreten Funktionen sowieso nicht geben kann.

Im Allgemeinen können

- Definitionsbereich,
- Stetigkeit,
- Polstellen,
- Nullstellen,
- lokale und globale Extremstellen,
- Wendepunkte,
- Monotonieverhalten,
- Krümmungsverhalten und
- asymptotisches Verhalten

untersucht werden.

In praktischen Anwendungen wie z.B. in den folgenden Aufgaben ist die zu untersuchende Funktion oft nicht gegeben. Es handelt sich daher nicht um typische Kurvendiskussionen, bei denen die Funktion gegeben ist und untersucht werden soll. Erst muss die Funktion aus bestimmten Angaben gefunden und anschließend weiter untersucht werden (umgekehrte Kurvendiskussionen).

Der dadurch erhöhte Rechenaufwand kann durch Verwendung eines CAS (MathCad, Derive, ...) in Grenzen gehalten werden. Gleichzeitig eröffnet eben ein solches CAS auch die Möglichkeit, komplexere Aufgaben – die vor der Einführung der CAS im Unterricht den SchülerInnen nicht zumutbar waren – zu besprechen und zu lösen.

Kurz zu den Beispielen:

- In der ersten Aufgabe wird eine Parabel ausgehend von drei bekannten Punkten bestimmt und danach der Scheitel sowie der erste Neigungswinkel in einem Punkt bestimmt. Hier wird im ersten Teil eine bekannte Aufgabe wiederholt und erst im zweiten Teil die Differentialrechnung eingesetzt.
- In der zweiten Aufgabe sind zwei Punkte und ein Neigungswinkel gegeben; daraus wird wiederum eine Parabel und ihre Extremstelle berechnet. Dieses Beispiel stellt damit eine Steigerung der ersten Aufgabe dar.
- In der dritten Aufgabe sind von einer Polynomfunktion vierten Grades ein allgemeiner Punkt, ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente (=Sattelpunkt) und eine Nullstelle gegeben. Gesucht sind ein erster Neigungswinkel, der größte auftretende Neigungswinkel sowie die durchschnittliche Steigung. Wiederum stellt dieses Beispiel eine Steigerung zu den vorherigen dar.
- Die vierte Aufgabe erscheint mir besonders interessant, da hier ein nichtlineares Gleichungssystem in drei Unbekannten gelöst wird und danach Wendepunkt und Sättigungsgrenze des Wachstumsmodell allgemein und konkret für die Aufgabe bestimmt werden.

## 2.4.1. Tennis

<u>Aufgabestellung:</u>

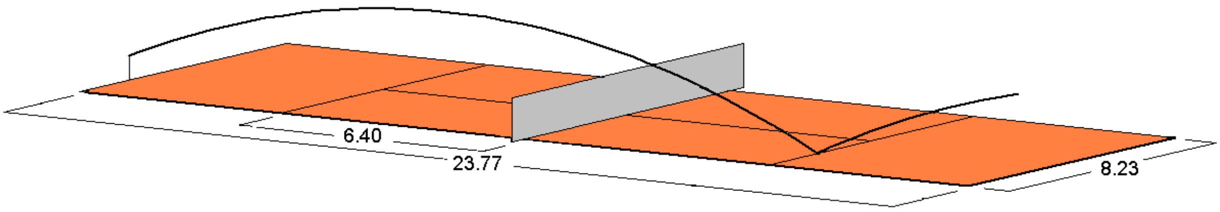
Ein Tennisball wird auf der Grundlinie in 0.6m Höhe so getroffen, dass er parallel zum Feldrand fliegt. Er überquert das Netz in 2.0m Höhe und trifft das gegnerische Feld auf der Aufschlaglinie.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn man von einer parabelförmigen Bahn ausgeht?

b) An welcher Stelle fliegt der Ball am höchsten?

c) In welchem Winkel trifft der Ball das gegnerische Feld?

Verwende zur Lösung die Maße aus untenstehender Zeichnung (Maße in m).




<u>Lösung:</u>

a) Die allgemeine Darstellung der Flugbahn (Parabel) lautet

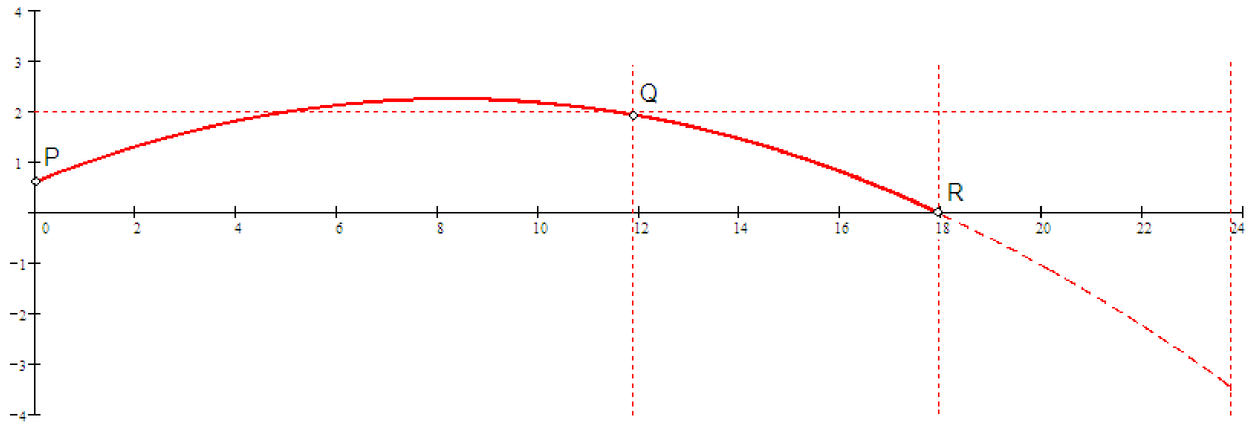
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

und die ersten zwei Ableitungen lauten

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$
$$f''(x) = 2 \cdot a$$

Nach Wahl des Koordinatensystems – Skizze auf der nächsten Seite – ergeben sich drei Parabelpunkte:

$$P = (0/0.6), \quad Q = \left(\frac{23.77}{2} \Big/ 2\right), \quad R = \left(\frac{23.77}{2} + 6.4 \Big/ 0\right)$$




Einsetzen der Punkte in die Funktion liefert ein lineares Gleichungssystem in drei Unbekannten:

$$f(0) = 0.6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$
$$f\left(\frac{23.77}{2}\right) = 2 = a \cdot \left(\frac{23.77}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{23.77}{2} + c$$
$$f\left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right) = 0 = a \cdot \left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right)^2 + b \cdot \left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right) + c$$

Es ergibt sich direkt c=0.6 aus der ersten Gleichung. Durch Elimination erhält man die gerundeten Werte a= –0.024 und b=0.397.

Damit lautet die Funktionsgleichung

$$f(x) = -0.024 \cdot x^2 + 0.397 \cdot x + 0.6 .$$

b) Im höchsten Punkt H der Flugbahn (=Scheitel der Parabel) ist die Tangente waagrecht. Daher ergeben sich mit

$$f'(x) = -0.048 \cdot x + 0.397 = 0$$

die Scheitelkoordinaten

$$x_s = 8.445, \quad y_s = 2.278 .$$

Ob ein lokaler Hochpunkt vorliegt wird mit der zweiten Ableitung überprüft:

$$f''(x) = -0.048 < 0$$

(Der Scheitel kann auch ohne Differentialrechnung durch Übergang auf die Scheitelform bzw. nach Berechnung der Nullstellen bestimmt werden. Auch die Kontrolle durch die zweite Ableitung kann dann entfallen.)

c) Der Ball trifft das gegnerische Feld im Punkt R. Der Aufprallwinkel ergibt sich aus

$$\tan(\varphi) = f'\left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right) = -0.048 \cdot \left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right) + 0.397$$

und lautet daher

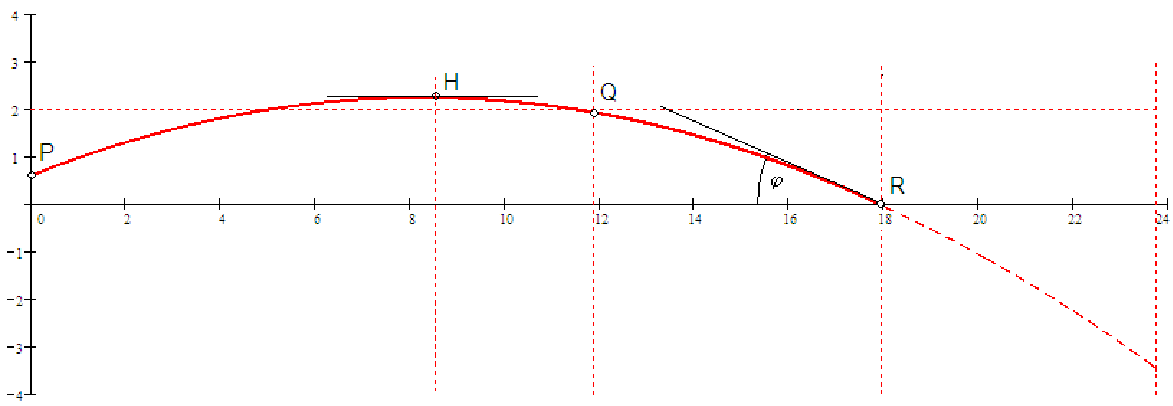
$$\varphi = -24.849°$$

Antwort:

Die Lösungsfunktion lautet

$$f(x) = -0.024 \cdot x^2 + 0.397 \cdot x + 0.6$$

Der höchste Punkt der Bahn lautet H=(8.4/2.3) und der Aufprallwinkel φ beträgt 25°.




Lösung der Aufgabe im CAS MathCAD:

Lösung des Gleichungssystems:

$$a = 1 \quad b = 1$$

$vorgabe$

$$2 = a \cdot \left(\frac{23.77}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{23.77}{2} + 0.6$$

$$0 = a \cdot \left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right)^2 + b \cdot \left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right) + 0.6$$

$$lsg = suchen\,(a,b)$$

$$lsg = \begin{pmatrix} -0.024 \\ 0.397 \end{pmatrix}$$

$$a = lsg_0 \qquad\qquad b = lsg_1$$

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 0.6$$

Berechnung des Scheitels (=lokales Maximum):

$$f_{ersteAbleitung}(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$x = 1$$

$vorgabe$

$$f_{ersteAbleitung}(x) = 0$$

$$extremum = suchen(x)$$

$$extremum = 8.445$$

$$f(extremum) = 2.278$$

Berechnung des Winkels:

$$winkel = atan\left(f_{ersteAbleitung}\left(\frac{23.77}{2} + 6.4\right)\right) \cdot \frac{180}{\pi} \qquad\qquad winkel = -24.849°$$

## 2.4.2. Tischtennis

Aufgabenstellung:

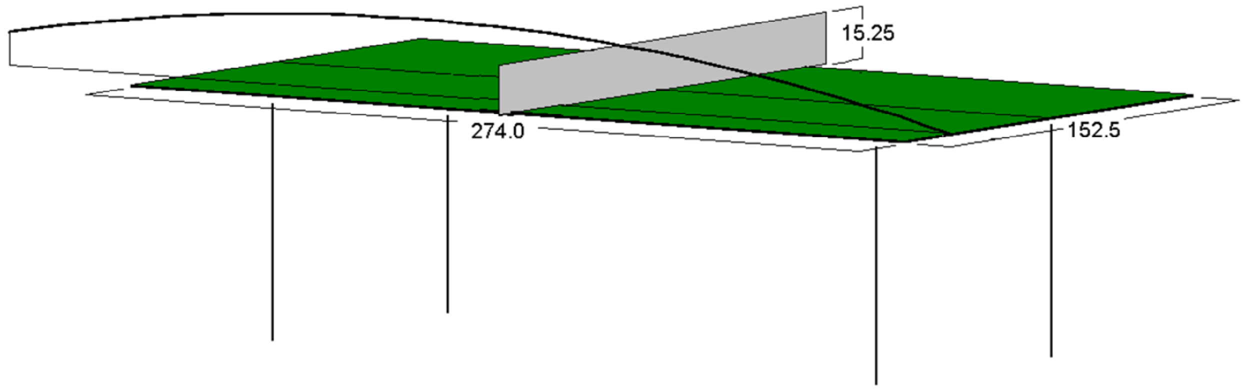
Ein Tischtennisball wird 60cm vor und 10 cm über der Tischplatte so getroffen, dass er mit einem Steigungswinkel von 10° aufsteigt und das gegnerische Feld erst auf der Tischkante trifft.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn man von einer parabelförmigen Bahn ausgeht?

b) An welcher Stelle fliegt der Ball am höchsten?

c) In welcher Höhe überfliegt der Ball das Netz?

Verwende zur Lösung die Maße aus untenstehender Zeichnung (Maße in cm).




Lösung:

a) Die allgemeine Darstellung der Flugbahn (Parabel) lautet

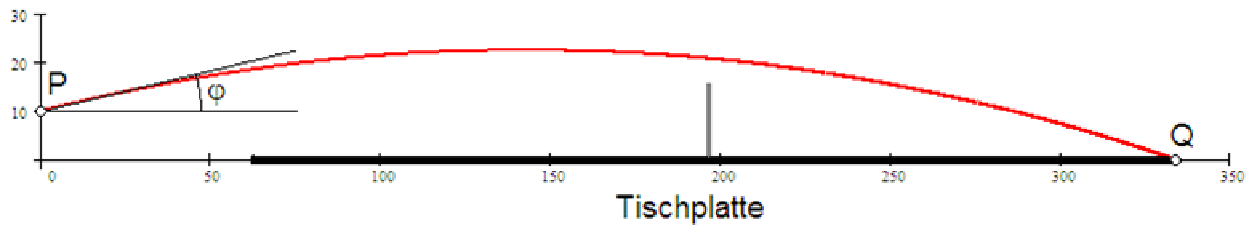
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

und ihre erste und zweite Ableitung

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$
$$f''(x) = 2 \cdot a$$

Nach Wahl des Koordinatensystems (laut Skizze) ergeben sich zwei Parabelpunkte:

$$P = (0/10), \quad Q = (334/0)$$




Gemeinsam mit dem Steigungswinkel φ=10° in x=0 ergibt sich ein lineares Gleichungssystem in drei Unbekannten:

$$f(0) = 10 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$
$$f(334) = 0 = a \cdot (334)^2 + b \cdot 334 + c$$
$$f'(0) = \tan(10°) = 2 \cdot a \cdot 0^2 + b = b$$

Es ergibt sich direkt c=0 aus der ersten und b=tan(10°)=0.176 aus der dritten Gleichung. Durch Einsetzen in die zweite erhält man a= –0.0006176.

Damit lautet die Funktionsgleichung

$$f(x) = -0.0006176 \cdot x^2 + 0.176 \cdot x + 10\,.$$

b) Im höchsten Punkt H der Flugbahn (=Scheitel der Parabel) ist die Tangente waagrecht. Daher ergeben sich mit

$$f'(x) = -0.0012352 \cdot x + 0.176 = 0$$

durch Lösen der linearen Gleichung und Einsetzen in die Funktionsgleichung die Scheitelkoordinaten

$$x_s = 142.76, \quad y_s = 22.586\,.$$

Ob ein lokaler Hochpunkt vorliegt wird mit der zweiten Ableitung überprüft:

$$f''(x) = -0.0012352 < 0$$

Der Scheitel kann auch ohne Differentialrechnung durch Übergang auf die Scheitelform bzw. nach Berechnung der Nullstellen bestimmt werden. Die Kontrolle durch die zweite Ableitung kann dann entfallen.

c) Der Ball überfliegt das Netz im Kurvenpunkt R. Seine Höhe wird durch Einsetzen in die Grundfunktion berechnet:

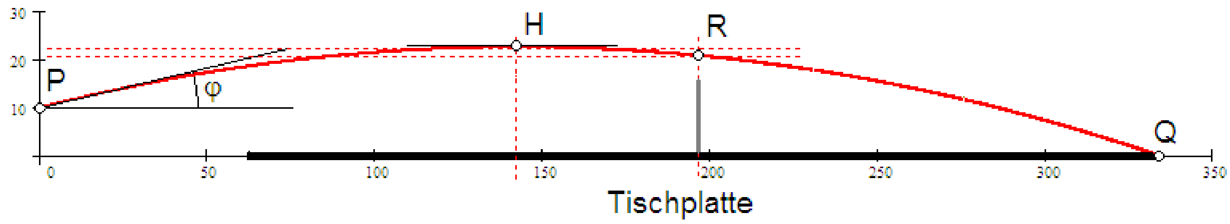
$$f\left(\frac{274}{2}+60\right)=20.769 \quad .$$

<u>Antwort:</u>

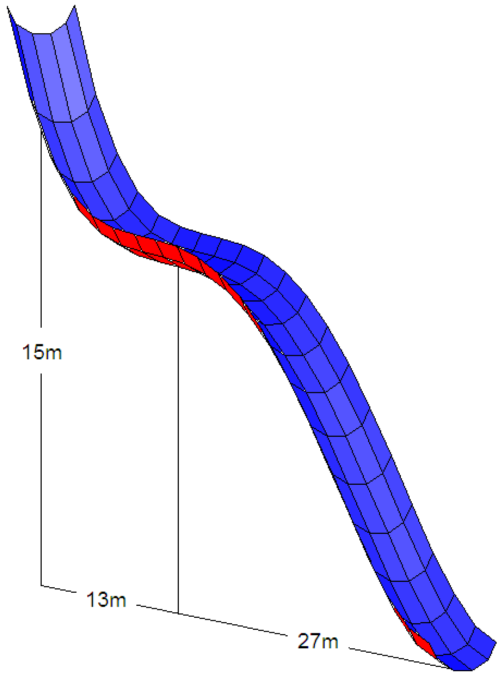
Die Lösungsfunktion lautet

$$f(x)=-0.0006176\cdot x^2+0.176\cdot x+10$$

der höchste Punkt der Bahn lautet ca. H=(143/23) und das Netz wird ca. 21cm über der Tischfläche überflogen.



## 2.4.3. Wasserrutsche




Aufgabenstellung:

Ein Firma plant ein neues Modell einer Wasserrutsche:

Die Einstiegsstelle soll 15m über der Ausstiegstelle liegen. 13m (Luftlinie) von der Einstiegsstelle entfernt soll die Bahn waagrecht verlaufen und danach bis zur Ausstiegstelle steil abfallen. In der Ausstiegsstelle soll die Bahn wieder waagrecht sein.

a) Wie lautet die Polynomfunktion 4.Grades, welche die Bahn beschreibt?

b) Wie hoch ist die Bahn nach 13m Luftlinie?

c) Wie steil ist die Bahn an der Einstiegstelle?

d) Wo ist die steilste Stelle der Bahn?

e) Wie groß ist die mittlere Steigung der Bahn?

Lösung:

a) Die allgemeine Darstellung einer Polynomfunktion vierten Grades lautet

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e.$$

Die erste und zweite Ableitung lauten

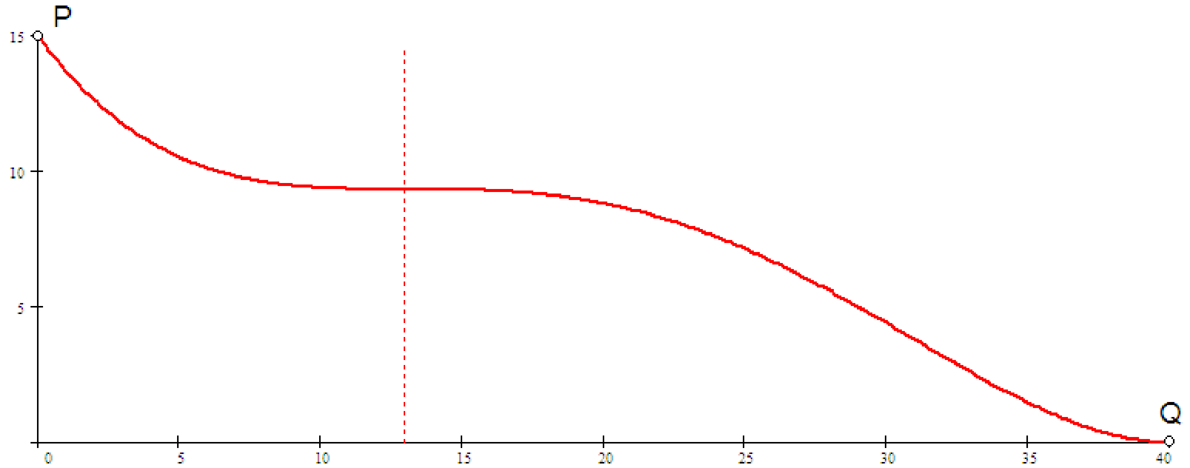
$$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$$
$$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 6 \cdot b \cdot x + 2 \cdot c$$

Nach Wahl des Koordinatensystems (laut Skizze) ergeben sich zwei Kurvenpunkte

$$P = (0/15), \quad Q = (40/0)$$

sowie drei weitere Angaben für die Funktion f:

$$f'(13) = 0, \quad f''(13) = 0, \quad f'(40) = 0$$




Dadurch erhält man ein lineares Gleichungssystem in fünf Unbekannten:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 15 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e \qquad \Rightarrow e = 15 \\
f(40) &= 0 = a \cdot 40^4 + b \cdot 40^3 + c \cdot 40^2 + d \cdot 40 + e \\
f'(13) &= 0 = 4 \cdot a \cdot 13^3 + 3 \cdot b \cdot 13^2 + 2 \cdot c \cdot 13 + d \\
f'(40) &= 0 = 4 \cdot a \cdot 40^3 + 3 \cdot b \cdot 40^2 + 2 \cdot c \cdot 40 + d \\
f''(13) &= 0 = 12 \cdot a \cdot 13^2 + 6 \cdot b \cdot 13 + 2 \cdot c
\end{aligned}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems wird das CAS MathCad verwendet:

$a := 1 \qquad b := 2 \qquad c := -1 \qquad d := 3$

Vorgabe

$$40^4 \cdot a + 40^3 \cdot b + 40^2 \cdot c + 40 \cdot d + 15 = 0$$

$$4 \cdot 40^3 \cdot a + 3 \cdot 40^2 \cdot b + 2 \cdot 40 \cdot c + d = 0$$

$$4 \cdot 13^3 \cdot a + 3 \cdot 13^2 \cdot b + 2 \cdot 13 \cdot c + d = 0$$

$$12 \cdot 13^2 \cdot a + 6 \cdot 13 \cdot b + 2 \cdot c = 0$$

$$\text{lsg} := \text{suchen}(a, b, c, d) \qquad \text{lsg} = \begin{pmatrix} 5.267\times 10^{-5} \\ -4.635\times 10^{-3} \\ 0.127 \\ -1.424 \end{pmatrix}$$

$$a := \text{lsg}_0 \qquad b := \text{lsg}_1 \qquad c := \text{lsg}_2 \qquad d := \text{lsg}_3$$

$$f(x) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + 15$$

daher konkret

$$f(x) = 0.00005267 \cdot x^4 - 0.004635 \cdot x^3 + 0.127 \cdot x^2 - 1.424 \cdot x + 15$$

b) Die Höhe des Bahnpunkts W, der 13m Luftlinie von der Einstiegsstelle entfernt ist beträgt

$$f(13) = 9.272 \,.$$

W ist Wendepunkt der Bahn mit waagrechter Tangente (=Sattelpunkt).

c) Der Winkel in der Einstiegstelle ergibt sich aus

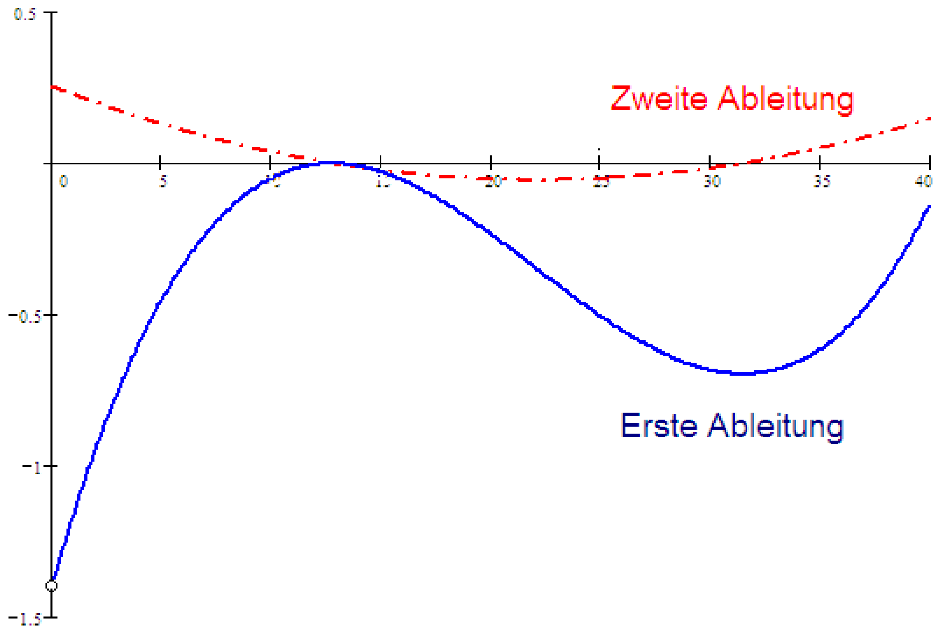
$$\tan(\varphi) = f'(0) = -1.424$$

und lautet daher

$$\varphi = -54.925° \,.$$

d) An der steilsten Stelle nimmt die erste Ableitung den vom Betrag her größten Wert an (=globale Extremstelle im Definitionsbereich).

Wie das Diagramm zeigt tritt die größte Steigung im Einstiegspunkt auf.




e) Die mittlere Steigung ergibt sich aus dem Steigungsdreieck der Sehne PQ als

$$\tan(\mu) = \frac{-15}{40} = -0.375$$

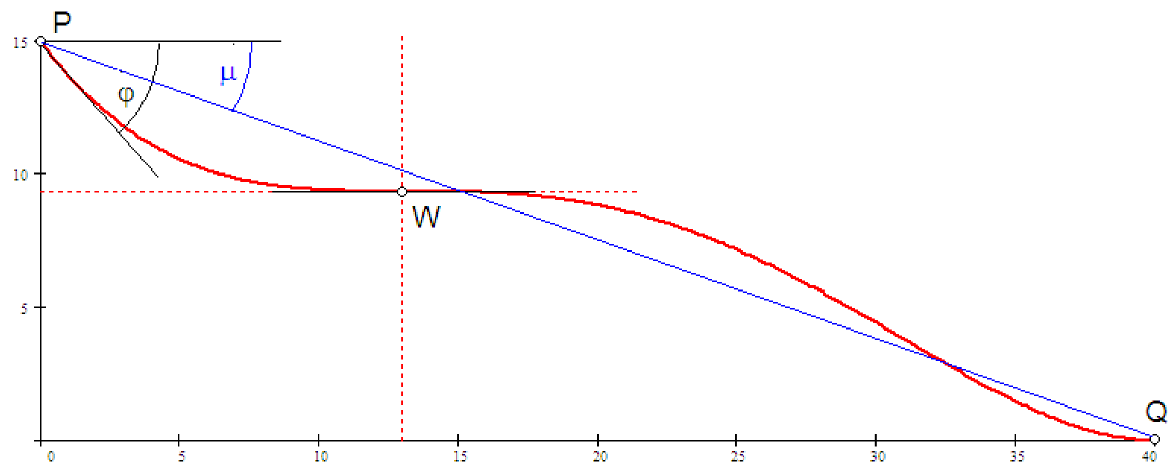
und beträgt damit 37.5%.

<u>Antwort:</u>

Die Lösungsfunktion lautet

$$f(x) = 0.00005267 \cdot x^4 - 0.004635 \cdot x^3 + 0.127 \cdot x^2 - 1.424 \cdot x + 15$$

Nach 13m Luftlinie ist die Bahn ca. 9.3m hoch. An der Einstiegsstelle ist die Bahn am steilsten, der Winkel beträgt dort ca. 55°. Die mittlere Steigung beträgt 37.5%.



## 2.4.4. Logistisches Wachstum

Aufgabestellung:

Aufgrund von den durch Volkszählungen erhobenen Daten (Tabelle) soll ein mathe–matisches Modell für die Bevölkerungs–entwicklung entwickelt werden.

| Jahr | 1750 | 1850 | 2000 |
|---|---|---|---|
| Bevölkerung (in Millionen Menschen) | 15 | 195 | 6350 |

a) Durch welche Funktion lässt sich das Bevölkerungswachstum beschreiben wenn logistisches Wachstums vorausgesetzt wird?

b) Wann ist der Zeitpunkt der Trendwende erreicht, nach dem sich die Wachstumsgeschwindigkeit nur mehr verlangsamt?

c) Auf welche Größe wird die Weltbevölkerung 2100 vermutlich angewachsen sein?

d) Wie groß kann die Weltbevölkerung – dieses Modell vorausgesetzt – maximal werden?

e) Welche Zusammenhänge bzw. neue Erkenntnisse bezüglich des logistischen Wachstums konntest du in diesem Beispiel gewinnen?

Lösung:

a) Eine allgemeine Darstellung des logistischen Wachstums lautet

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-b\cdot(x-c)}} \quad \Rightarrow \quad f(x) + f(x)\cdot e^{-b\cdot x}\cdot e^{b\cdot c} = a$$

Um die Rechnung zu vereinfachen rechnen wir nicht mit den tatsächlichen Jahreszahlen sondern zählen das Jahr 1750 als „0“, 1751 als „1“ usw.. Dadurch ergibt sich folgende Wertetabelle

| Jahr | 1750 | 1850 | 2000 |
|---|---|---|---|
| Zeitpunkt (in Jahren) | 0 | 100 | 250 |
| Bevölkerung (in Millionen Menschen) | 15 | 195 | 6350 |

Durch Einsetzen in die Funktion erhält man damit ein nichtlineares Gleichungssystem in drei Unbekannten

$$\begin{aligned} a &= 15 + 15 \cdot e^{b \cdot c} \\ a &= 195 + 195 \cdot e^{-b \cdot 100} \cdot e^{b \cdot c} \\ a &= 6350 + 6350 \cdot e^{-b \cdot 250} \cdot e^{b \cdot c} \end{aligned}$$

aus welchem die Unbekannte a sofort eliminiert werden kann, womit sich

$$\begin{aligned} 6350 + 6350 \cdot e^{-b \cdot 250} \cdot e^{b \cdot c} &= 15 + 15 \cdot e^{b \cdot c} \\ 195 + 195 \cdot e^{-b \cdot 100} \cdot e^{b \cdot c} &= 15 + 15 \cdot e^{b \cdot c} \end{aligned}$$

und daraus nach Formelumstellungen

$$\begin{aligned} 6335 &= \left(15 - 6350 \cdot e^{-b \cdot 250}\right) \cdot e^{b \cdot c} \\ 180 &= \left(15 - 195 \cdot e^{-b \cdot 100}\right) \cdot e^{b \cdot c} \end{aligned}$$

ergibt. Durch Division der beiden Gleichungen lässt sich die Unbekannte c eliminieren und es entsteht die nichtlineare Gleichung

$$\frac{1267}{36} = \frac{\left(15 - 6350 \cdot e^{-b \cdot 250}\right)}{\left(15 - 195 \cdot e^{-b \cdot 100}\right)}$$

Weitere Formelumstellungen liefert schließlich die Gleichung

$$e^{-b \cdot 100} - \frac{15240}{16471} \cdot e^{-b \cdot 250} - \frac{1231}{16471} = 0 ,$$

die durch Substitution $m = e^{-b \cdot 100}$ zuerst zu

$$m - \frac{15240}{16471} \cdot m^{2.5} - \frac{1231}{16471} = 0 \quad \Rightarrow \quad 16471 \cdot m - 1231 = 15240 \cdot m^{\frac{5}{2}} ,$$

umgestellt wird und damit zu einem Polynom 5.Grades

$$(16471 \cdot m - 1231)^2 = 232257600 \cdot m^5 \quad \Rightarrow$$

$$232257600 \cdot m^5 - 271293841 \cdot m^2 + 40551602 \cdot m - 1515361 = 0$$

führt. Die Berechnung erfolgt in MathCad, wobei poly die Koeffizienten des Polynoms zusammenfasst und nullstellen(poly) alle reellen sowie komplexen Nullstellen zurückliefert:

$$poly = \begin{bmatrix} -1515361 \\ 40551602 \\ -271293841 \\ 0 \\ 0 \\ 232257600 \end{bmatrix}$$

$$nullstellen\,(poly) = \begin{bmatrix} -0.574804481681646 + 0.914329213461005i \\ -0.574804481681646 - 0.914329213461005i \\ 0.073387461129951 \\ 0.07622150223333 \\ 1.000000000000012 \end{bmatrix}$$

Alternativ zur Lösung in MathCad bietet sich das Newtonsche Näherungsverfahren (unter Verwendung einer Tabellenkalkulationssoftware) als Lösungsmethode an.

Es ergeben sich drei in Frage kommende Stellen

$$m_1 \approx 0.073387461129951, \quad m_2 \approx 0.07622150223333, \quad m_3 \approx 1.000000000000012 \, .$$

Unter Verwendung von

$$m = e^{-b \cdot 100} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-1}{100} \cdot \ln(m)$$

erhält man

$$b_1 = 0.026120021872469, \quad b_2 = 0.025741116745555, \quad b_3 = \text{-}1.154631945610156\text{E-}16 \, .$$

Damit erhält man wegen

$$c = \frac{1}{b} \cdot \ln \frac{12}{1 - 13 \cdot e^{-b \cdot 100}}$$

zwei reelle Lösungen

$$c_1 = 213.0482552961512, \quad c_2 = 279.0143316594965$$

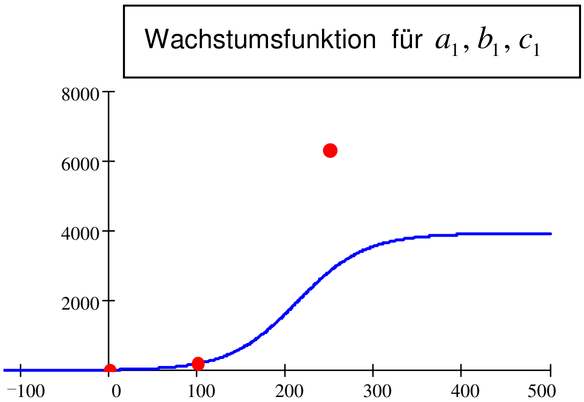
und mit

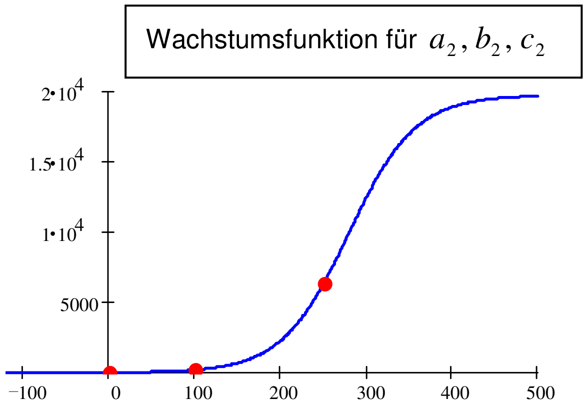
$$a = 15 + 15 \cdot e^{b \cdot c}$$

zwei Lösungen

$$a_1 = 3931.193007473568, \quad a_2 = 19750.82292591146.$$

Wie die Diagramme zeigen




scheiden auch $a_1$, $b_1$ und $c_1$ als Lösungen aus und es bleibt die Lösungsfunktion

$$f(x) = \frac{19750.82292591146}{1 + e^{-0.025741116745555 \cdot (x - 279.0143316594965)}} \approx \frac{19751}{1 + e^{-0.0257 \cdot (x - 279)}}.$$

In den folgenden Berechnungen werden die gerundete Wachstumsparameter $a_2$, $b_2$ und $c_2$ verwendet. Daher verwenden wir ab nun die Funktion

$$f(x) = \frac{19751}{1 + e^{-0.0257 \cdot (x - 279)}}$$

b) Die Trendwende geschieht im Wendepunkt, da in diesem Punkt die Wachstumsgeschwindigkeit einen lokalen Extremwert annimmt und damit vor dem Wendepunkt zu– und nach dem Wendepunkt abnimmt.

Der Wendepunkt der logistischen Kurve wird zuerst allgemein berechnet, da sich interessante Zusammenhänge zur den Parametern a, b, c in der Wachstumsfunktion ergeben.

Zur Bestimmung des Wendepunkts werden zuerst die ersten drei Ableitung gebildet:

$$f(x)=\frac{\mathrm{a}}{1+e^{-b\cdot(x-c)}}$$
$$f'(x)=\frac{-a\cdot b\cdot e^{-b\cdot(x-c)}}{\left(1+e^{-b\cdot(x-c)}\right)^2}$$
$$f''(x)=\frac{a\cdot b^2\cdot e^{b\cdot c}\cdot\left(1-e^{-b\cdot(x-c)}\right)}{\left(1+e^{-b\cdot(x-c)}\right)^3}$$
$$f'''(x)=\frac{2\cdot a\cdot b^3\cdot e^{-b\cdot(x-2\cdot c)}\cdot\left(2-e^{-b\cdot(x-c)}\right)}{\left(1+e^{-b\cdot(x-c)}\right)^4}$$

Nullsetzen der zweiten Ableitung liefert mit

$$f''(x)=\frac{a\cdot b^2\cdot e^{b\cdot c}\cdot\left(1-e^{-b\cdot(x-c)}\right)}{\left(1+e^{-b\cdot(x-c)}\right)^3}=0$$

die Gleichung

$$a\cdot b^2\cdot e^{b\cdot c}\cdot\left(1-e^{-b\cdot(x-c)}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 1=e^{-b\cdot(x-c)} \quad\Rightarrow\quad \ln(1)=0=-b\cdot(x-c)$$

und damit x=c. Wegen

$$f'''(c)=\frac{2\cdot a\cdot b^3\cdot e^{-b\cdot(c-2\cdot c)}\cdot\left(2-e^{-b\cdot(c-c)}\right)}{\left(1+e^{-b\cdot(c-c)}\right)^4}=\frac{2\cdot a\cdot b^3\cdot e^{b\cdot c}\cdot 1}{2^4}=\frac{a\cdot b^3\cdot e^{b\cdot c}}{2^3}\neq 0$$

handelt es sich bei

$$W=(c/f(c))=\left(c\Big/\frac{\mathrm{a}}{1+e^{-b\cdot(c-c)}}\right)=\left(c\Big/\frac{\mathrm{a}}{2}\right)$$

tatsächlich um einen Wendepunkt.

Im konkreten Beispiel wird wegen c=279 der Zeitpunkt der Trendwende im Jahr 2029=1750+c=1750+279 erreicht.

Dann beträgt die Weltbevölkerung etwa

$$f(c)=\frac{19751}{2}=9875.5$$

Millionen Menschen.

c) Das Jahr 2100 entspricht dem x–Wert 350. Daher wird die Weltbevölkerung – dieses Wachstumsmodell vorausgesetzt – im Jahr 2100 auf

$$f(350) = \frac{19751}{1 + e^{-0.0257 \cdot (350-279)}} \approx 17008$$

Millionen Menschen angewachsen sein.

d) Die maximale Größe der Weltbevölkerung (="Tragfähigkeit" der Erde) ist zugleich Sättigungsgrenze des logistischen Wachstums und ergibt sich (wieder allgemein berechnet) durch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{a}}{1 + e^{-b\cdot(x-c)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{1 + \frac{e^{b\cdot c}}{e^{b\cdot x}}} = a$$

Die maximale Größe der Weltbevölkerung beträgt in diesem Modell 19751 Millionen Menschen. Die Gerade y=a ist waagrechte Asymptote der Wachstumskurve.

e) In der Formel für das logistische Wachstum

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-b\cdot(x-c)}}$$

ist a die Sättigungsgrenze. Die Geraden y=a sowie y=0 sind waagrechte Asymptoten der Kurve; der Nachweis erfolgt durch Berechnung von

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{a}}{1 + e^{-b\cdot(x-c)}} = 0$$

Der Wendepunkt der Kurve liegt bei

$$\left( c \middle/ \frac{\mathrm{a}}{2} \right).$$

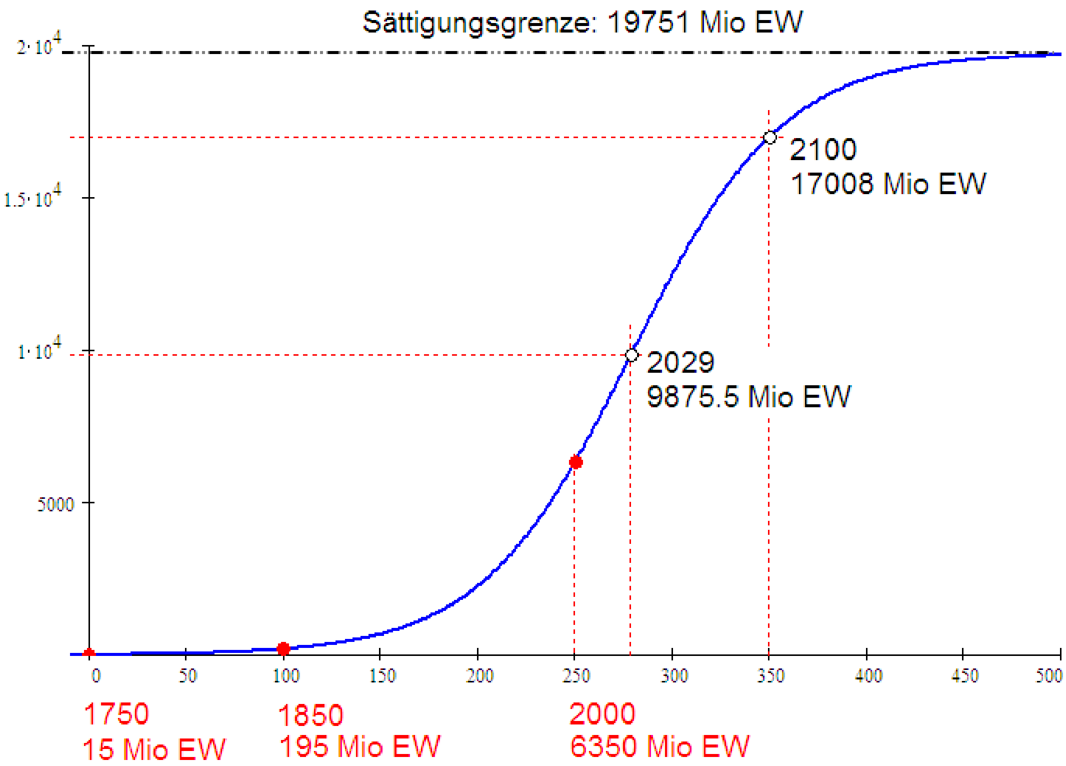
b ist eine Wachstumskonstante.

Antwort:

Die Wachstumsfunktion lautet

$$f(x) = \frac{19751}{1+e^{-0.0257\cdot(x-279)}}.$$

Im Jahr 2029 tritt bei einer Bevölkerungszahl von etwa 9875.5 Millionen Menschen die Trendwende ein, im Jahr 2100 ist eine Bevölkerungszahl von etwa 17008 Millionen Menschen zu erwarten. Insgesamt steigt die Weltbevölkerung nie über ca. 19751 Millionen Menschen.




Anmerkung:

Gibt man drei Messungen

$$(0/y_1),\ (x_2/y_2),\ (x_3/y_3)$$

sowie die Wachstumsfunktion

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-b\cdot(x-c)}}$$

vor, dann ergibt sich als „aufgelöstes“ Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&e^{-b\cdot x_2} - \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}\cdot\frac{y_3}{y_2}\cdot e^{-b\cdot x_3} - \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}\cdot\frac{y_1}{y_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b \approx \ldots \\
&c = \frac{1}{b}\cdot\ln\left(\frac{y_1 - y_2}{y_2\cdot e^{-x_2\cdot b} - y_1}\right) \\
&a = y_1\cdot\left(1 + e^{b\cdot c}\right)
\end{aligned}
$$

Die erste Gleichung hat stets die triviale innermathematische Lösung b=0, da

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}\cdot\frac{y_3}{y_2} + \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}\cdot\frac{y_1}{y_2} = 1$$

ergibt. b=0 ist allerdings niemals Lösung der Wachstumsaufgabe.

Die weiteren Lösungen können z.B. nach Substitution $e^{-b}=m$ und Übergang zu einer algebraischen Gleichung mit Hilfe von Näherungsverfahren gefunden werden.

## 2.5. Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben sind spezielle Kurvendiskussionen:

- Es wird eine Funktion (=Hauptbedingung, Zielfunktion) aufgestellt, von der ein Extremwert (Hoch– oder Tiefpunkt) gesucht ist.
- Durch die Nebenbedingung wird die Anzahl der Variablen in der Hauptbedingung verringert. Die Nebenbedingung erhält man meist mithilfe des Satzes des Pythagoras, des Strahlensatzes oder mithilfe einer gegebenen Hilfsgröße.

Im Gegensatz zur üblichen Kurvendiskussion ergeben sich hier von der Textangabe (außermathematisch) abhängige Definitionsbereiche. Die Lösung kann auch am Rand liegen (=globale Extremstelle).

Auch hier ist es wieder wichtig, über den „mechanischen Rechenweg" hinaus die inner– und außermathematischen Hintergründe zu verstehen.

Bei der Auswahl der vorliegenden Beispiele wurde besonders darauf geachtet, nicht die aus den Schulbüchern bekannten Aufgaben zu übernehmen sondern vielmehr bekannte Aufgaben zu variieren und zusätzliche Fragen aufzuwerfen und zu beantworten, die im Regelunterricht nicht immer Platz finden.

Daher kann es sinnvoll und notwendig sein, beim Einsatz der Beispiele im Schulunterricht die Angaben zu vereinfachen (Rechnung mit Zahlenwerten), den SchülerInnen illustrierende Grafiken zur Verfügung zu stellen bzw. die Rechnungen durch Zur–Verfügung–Stellen von Formeln zu vereinfachen.

<u>Kurz zu den Beispielen:</u>

- Die erste Aufgabe behandelt eigentlich das Fermat'sche Prinzip der Lichtausbreitung und führt zum Snellius'schen Brechungsgesetz. Obwohl es sich bei der Textaufgabe um eine bekannte Aufgabenstellung handelt, habe ich diese Aufgabe mit ins Kapitel aufgenommen, da sich am Ende ein sehr interessantes Diagramm ergibt.

- Auch in der zweiten Aufgabe ergeben sich am Ende sehr spannende Diagramme. Besonders hat mir aber gefallen, dass sich nach umfangreicher Rechnung eine recht einfache Lösung ergeben hat.
- Auf die Idee zur dritten Aufgabe bin ich per Zufall gestoßen. Ich hätte nicht gedacht, dass Firmen ihre Produkte tatsächlich mit Verlust verkaufen nur um Markt präsent zu sein. Ansonsten ist an der Aufgabe erwähnenswert, dass eine Funktion stückweise definiert wird.
- Die vierte Aufgabe hat eine Nahtstelle zur Integralrechnung. Hier sehe ich den Reiz darin, dass in der Aufgabe nach einer Variablen integriert und danach nach einer anderen abgeleitet werden muss.

## 2.5.1. Rettungsschwimmer

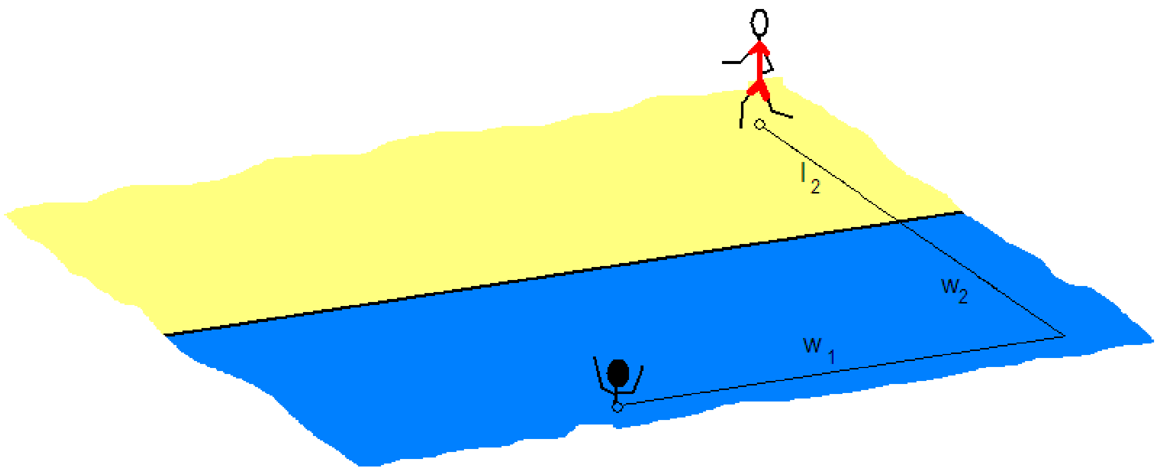
Aufgabestellung:

Ein Rettungsschwimmer L befindet sich an Land und sieht einen Ertrinkenden W im Wasser um Hilfe rufen.

a) An welcher Stelle des Ufers muss der Rettungsschwimmer ins Wasser gehen um möglichst rasch zum Ertrinkenden zu gelangen wenn er sich an Land mit der Geschwindigkeit $v_L$ und im Wasser mit der Geschwindigkeit $v_W$ fortbewegen kann?

b) Wie lange benötigt der Rettungsschwimmer zum Ertrinkenden?

c) Um wie viel Prozent wäre der Rettungsschwimmer langsamer wenn er den direkten Weg zum Ertrinkenden wählen würde?

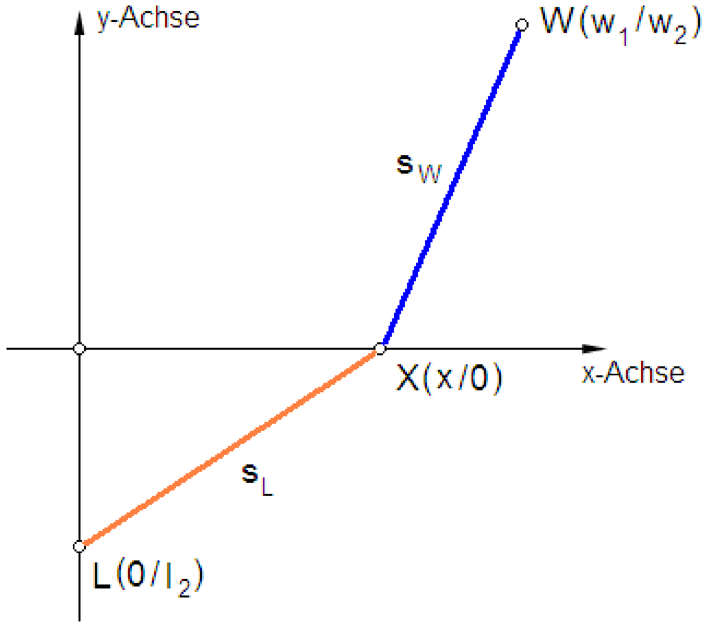



Rechne zuerst allgemein und verwende dann die konkreten Zahlenwerte

$$l_2 = 20m,\ w_1 = 100m,\ w_2 = 40m,\ v_L = 5\frac{m}{s},\ v_W = 1.6\frac{m}{s}$$

Lösung:

a) Nach Wahl des Koordinatensystems laut Skizze




erhält man die Koordinaten des Rettungsschwimmers $L=(0/l_2)$ und des Ertrinkenden $W=(w_1/w_2)$ mit $l_2<0$, $w_2>0$; weiters ergibt sich mit

$$v_L = \frac{s_L}{t_L} \quad \Rightarrow \quad t_L = \frac{s_L}{v_L}$$

$$v_W = \frac{s_W}{t_W} \quad \Rightarrow \quad t_W = \frac{s_W}{v_W}$$

die Zeit t als

$$t = t_L + t_W = \frac{s_L}{v_L} + \frac{s_W}{v_W}.$$

Die Wegstrecken $s_L$ und $s_W$ ergeben sich durch den Satz von Pythagoras als

$$s_L = \sqrt{x^2 + l_2^{\;2}} \qquad \Rightarrow \quad s_L{}' = \frac{x}{s_L}$$

$$s_W = \sqrt{(w_1 - x)^2 + w_2^{\;2}} \qquad \Rightarrow \quad s_W{}' = \frac{-(w_1 - x)}{s_W}$$

Daher lautet die Zielfunktion, die an der gesuchten Stelle ein Minimum annehmen soll,

$$t(x)=\frac{1}{v_L}\cdot\sqrt{x^2+{l_2}^2}+\frac{1}{v_W}\cdot\sqrt{(w_1-x)^2+{w_2}^2}$$

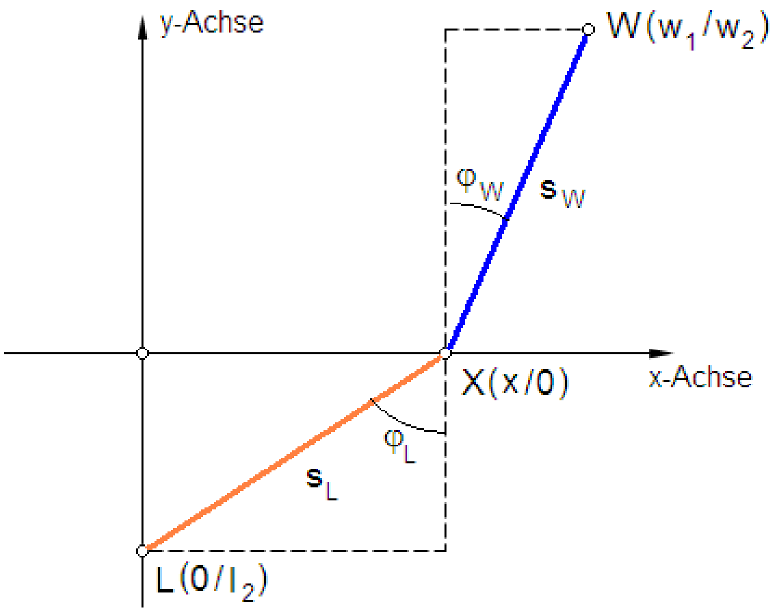
mit Definitionsbereich $D_x=[0;w_1]$ .Durch Differenzieren erhält man

$$t'(x)=\frac{1}{v_L}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+{l_2}^2}}-\frac{1}{v_W}\cdot\frac{(w_1-x)}{\sqrt{(w_1-x)^2+{w_2}^2}}$$

und Nullsetzen liefert

$$0=\frac{1}{v_L}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+{l_2}^2}}-\frac{1}{v_W}\cdot\frac{(w_1-x)}{\sqrt{(w_1-x)^2+{w_2}^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{v_L}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+{l_2}^2}}=\frac{1}{v_W}\cdot\frac{(w_1-x)}{\sqrt{(w_1-x)^2+{w_2}^2}}$$

Aus dem Diagramm




entnehmen wir die Abkürzungen

$$s_L=\sqrt{x^2+{l_2}^2},\quad s_W=\sqrt{(w_1-x)^2+{w_2}^2}$$

und erhalten

$$\frac{1}{v_L}\cdot\frac{x}{s_L}=\frac{1}{v_W}\cdot\frac{(w_1-x)}{s_W},$$

Wegen der Beziehungen

$$\frac{x}{s_L} = \sin(\varphi_L), \quad \frac{(w_1 - x)}{s_W} = \sin(\varphi_W)$$

erhält man einem Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten und den „Kurswinkeln“

$$\frac{v_L}{v_W} = \frac{\sin(\varphi_L)}{\sin(\varphi_W)}$$

Die Berechnung der Stelle x führt zum Lösen einer Gleichung 4.Ordnung

$$v_W^{\ 2} \cdot x^2 \cdot \left((w_1 - x)^2 + w_2^{\ 2}\right) = v_L^{\ 2} \cdot (w_1 - x)^2 \cdot \left(x^2 + l_2^{\ 2}\right).$$

An dieser Stelle rechnen wir mit Zahlenwerten und unter Verwendung von CAS weiter. Zuerst bestimmen wir extremwertverdächtige Stellen x und danach überprüfen wir den Typ der Extremstelle durch die 2.Ableitung.

Die Rechnung mit den konkreten Zahlenwerten

$$l_2 = 20m,\ w_1 = 100m,\ w_2 = 40m,\ v_L = 5\frac{m}{s},\ v_W = 1.6\frac{m}{s}$$

liefert die Gleichung

$$1.6^2 \cdot x^2 \cdot \left((100 - x)^2 + 40^2\right) = 5^2 \cdot (100 - x)^2 \cdot \left(x^2 + 20^2\right)$$

und führt zum Polynom

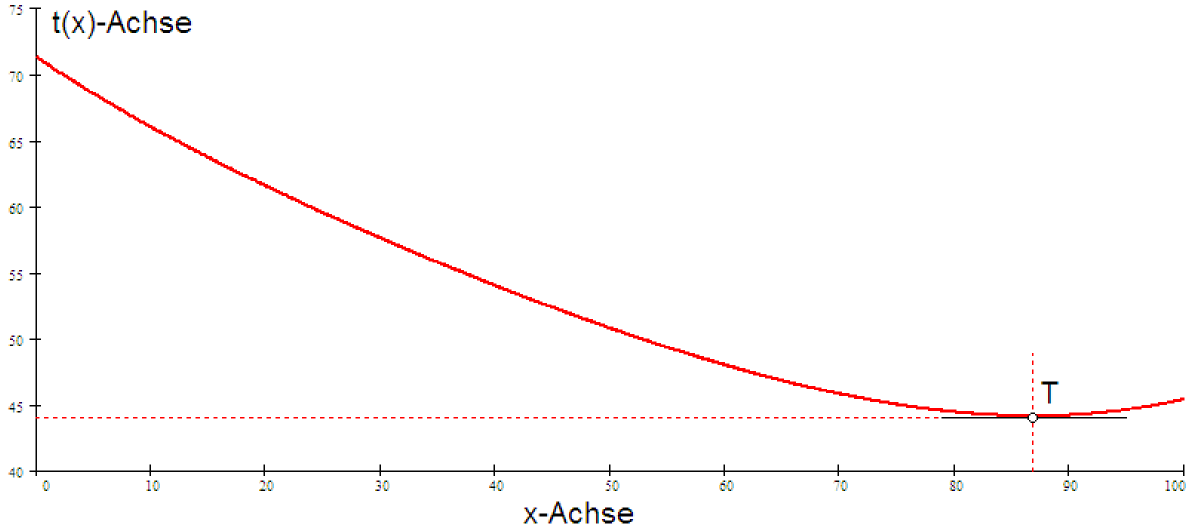
$$-561 \cdot x^4 + 112200 \cdot x^3 - 5757600 \cdot x^2 + 50000000 \cdot x - 2500000000 = 0,$$

welches mit dem CAS MathCad gelöst wird:

$$poly = \begin{bmatrix} -2500000000 \\ 50000000 \\ -5757600 \\ 112200 \\ -561 \end{bmatrix}$$

$$nullstellen\,(poly) = \begin{bmatrix} -0.0767059677 - 21.2797598183i \\ -0.0767059677 + 21.2797598185i \\ 86.8716458563 \\ 113.2817660787 \end{bmatrix}$$

Die Lösung $x_2$=113.2817660787 scheidet sofort aus, da sie nicht im Definitionsbereich liegt. Damit bleibt die Lösung $x_2$=86.8716458563≈86.87.




Zum Nachweis des Minimums bildet man die zweite Ableitung

$$t''(x) = \left(\frac{1}{v_L}\cdot\frac{x}{s_L} - \frac{1}{v_W}\cdot\frac{(w_1 - x)}{s_W}\right)' = \frac{1}{v_L}\cdot\frac{s_L - x\cdot s_L'}{s_L{}^2} - \frac{1}{v_W}\cdot\frac{-1\cdot s_W - (w_1 - x)\cdot s_W'}{s_W{}^2} =$$

$$= \frac{1}{v_L}\cdot\frac{s_L - x\cdot\dfrac{x}{s_L}}{s_L{}^2} - \frac{1}{v_W}\cdot\frac{-s_W - (w_1 - x)\cdot\dfrac{-(w_1 - x)}{s_W}}{s_W{}^2} = \frac{1}{v_L}\cdot\frac{s_L{}^2 - x^2}{s_L{}^3} + \frac{1}{v_W}\cdot\frac{s_W{}^2 - (w_1 - x)^2}{s_W{}^3}$$

und erhält nach Einsetzen der extremwertverdächtigen Stelle $x_1$ schließlich

$$t''(x_1) \approx 0.013155 > 0$$

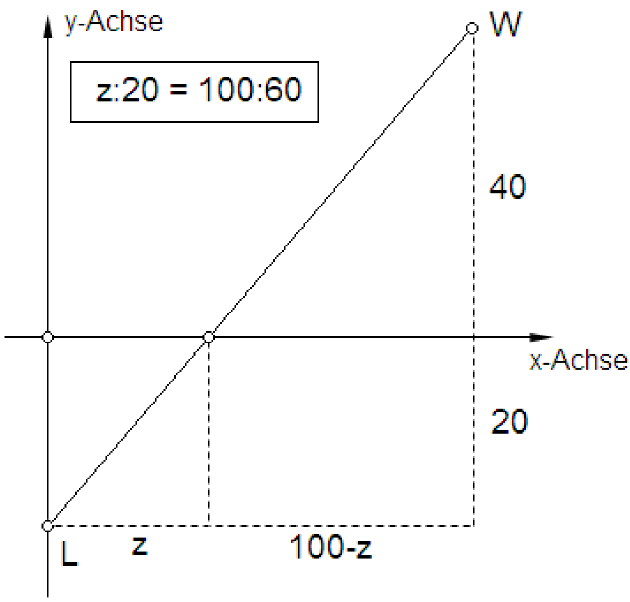
Daher liegt tatsächlich ein Minimum vor.

b) Der Rettungsschwimmer benötigt bis zum Ertrinkenden daher $t(x_1) \approx 44.14$ Sekunden.

c) Läuft der Schwimmer in direkter Linie zum Ertrinkenden, dann ergibt sich durch den Strahlensatz, wie man im Diagramm auf der nächsten Seite sehen kann, zuerst

$$z = \frac{100 \cdot 20}{60} \approx 33.33$$

und damit nach Einsetzen in die Zeitfunktion t(x) die Zeit $t(z) \approx 56.37$ Sekunden.




Damit verliert der Rettungsschwimmer beim direkten Weg 12.23 Sekunden und ist somit um

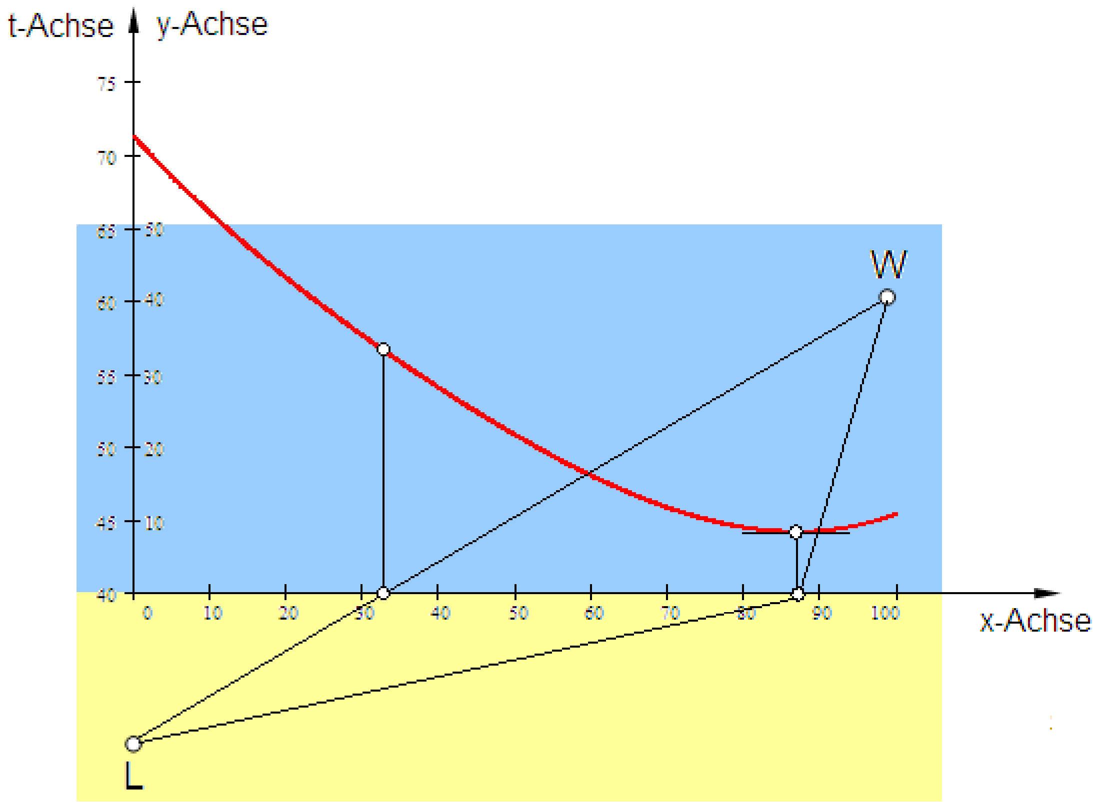
$$\frac{12.23}{44.14} \cdot 100 \approx 27.7$$

Prozent langsamer.

<u>Antwort:</u>

Um den Ertrinkenden am schnellsten zu erreichen soll der Rettungsschwimmer so zum Ufer laufen, dass er etwa 87m vom Nullpunkt entfernt ins Wasser gelangt. Er benötigt für diesen Weg etwa 45 Sekunden. Bewegt er sich statt dessen auf direktem Weg zum Ertrinkenden, dann wäre er etwa um 28% langsamer.

Folgendes Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen den Wegstrecken, „Kurswinkeln“ und den benötigten Laufzeiten.




Bemerkung:

Die Optimierungsaufgabe basiert auf dem „Fermat’schen Prinzips“. Demzufolge wählt das Licht stets den Weg, auf dem es am schnellsten vom Punkt L zum Punkt W kommt.

Wechselt das Licht von einem Medium in ein anderes und bewegt es sich in den verschiedenen Medien mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten fort, dann erhält man daraus das „Snellius’sche Brechungsgesetz“.

Das Brechungsgesetz wurde vermutlich schon im 10. Jahrhundert von Ibn Sahl erwähnt, 1601 von Thomas Harriot wiederentdeckt und schließlich gleichzeitig von Willebrord van Roijen Snell und Rene Descartes beschrieben.

## 2.5.2. Fußball

Aufgabenstellung:

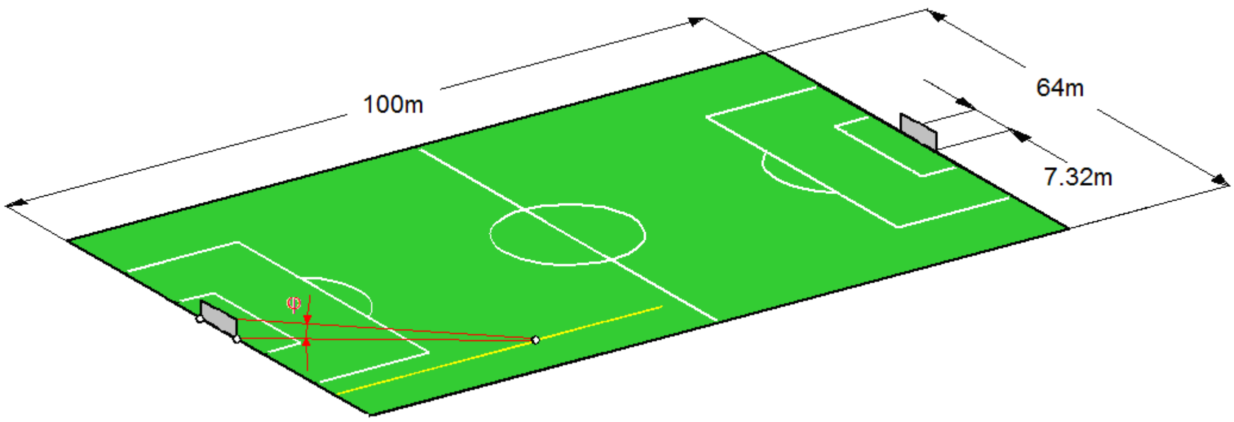
Ein Fußballspieler läuft in einem Meter Abstand parallel zur Seitenlinie zum gegnerischen Tor, um ein Tor zu schießen.

a) In welcher Entfernung zur Torlinie hat der Spieler den besten Schusswinkel, d.h. den größten Winkel ?

b) Stelle jene Kurve graphisch dar auf der alle Punkte besten Schusswinkels liegen.

c) Wie lange dauert es bis der Ball das Tor passiert wenn der Ball mit einer Geschwindigkeit von 130km/h vom Spieler exakt ins linke Eck (aus der Sicht des Torwarts) gespielt wird?

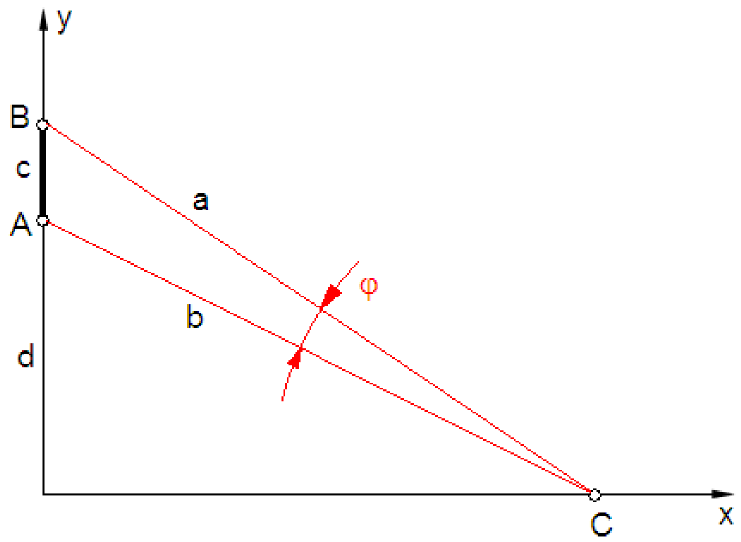
Verwende zur Lösung die Maße aus untenstehender Zeichnung.




Lösung:

Um eine allgemeine Formel für die Entfernung x angeben zu können wird solange als möglich ohne Verwendung konkrete Zahlen gerechnet. Im Unterricht ist es schülergerechter, sofort mit den gegebenen Zahlenwerten zu rechnen.

a) Nach Wahl des Koordinatensystems




erhält man drei Punkte

$$A(0/d),\quad B(0/d+c),\quad C(x/0)$$

und damit durch den Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\varphi) \quad\Rightarrow\quad \cos(\varphi) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$$

Nach Bestimmung der Strecken

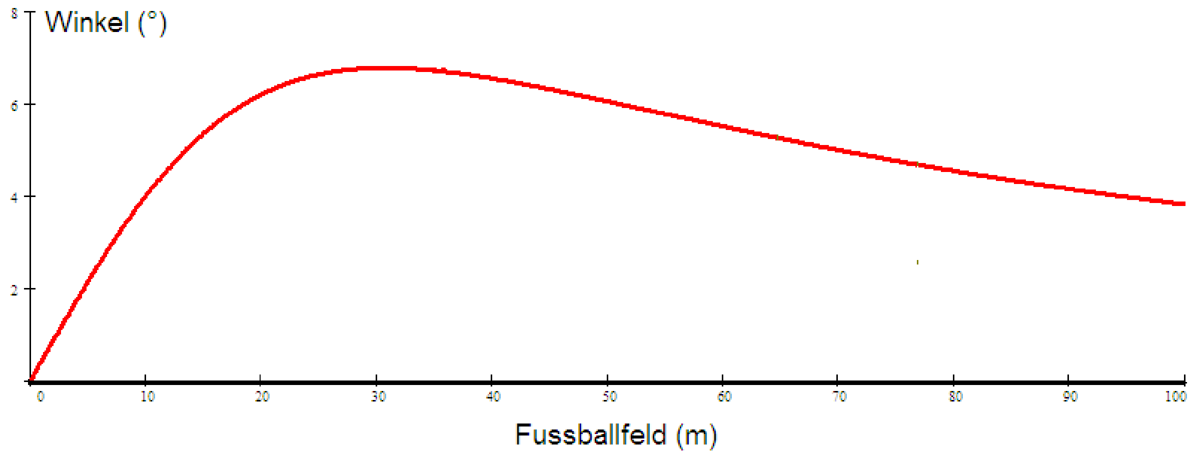
$$b = \sqrt{x^2+d^2} = b(x),\quad a = \sqrt{x^2+(d+c)^2} = a(x)$$

durch den Satz von Pythagoras (=Nebenbedingungen) erhält man die Zielfunktion

$$\varphi = \arccos\frac{x^2+(d+c)^2+x^2+d^2-c^2}{2\cdot\sqrt{x^2+(d+c)^2}\cdot\sqrt{x^2+d^2}} = \arccos\frac{x^2+d^2+c\cdot d}{\sqrt{x^2+(d+c)^2}\cdot\sqrt{x^2+d^2}}$$

Um die folgende Rechnung einfach zu halten wird sooft als möglich anstelle der Wurzelausdrücke die Abkürzungen a und b verwendet. Im Vergleich zur „direkten“ Rechnung wird der Aufwand dadurch bedeutend geringer.

Der beste Schusswinkel ist der maximale; daher ist das Maximum der Funktion φ=φ(x) gesucht.




Die Berechnung der ersten Ableitung erfolgt durch implizites Differenzieren zuerst allgemein

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\varphi)$$
$$\Rightarrow$$
$$0 = 2 \cdot a \cdot a' + 2 \cdot b \cdot b' - 2 \cdot (a' \cdot b \cdot \cos(\varphi) + a \cdot b' \cdot \cos(\varphi) - a \cdot b \cdot \sin(\varphi) \cdot \varphi')$$

und mit der für lokale Hochpunkte notwendigen Bedingung $\varphi'=0$ erhält man zuerst

$$0 = a \cdot a' + b \cdot b' - (a' \cdot b + a \cdot b') \cdot \cos(\varphi)$$

und wegen

$$b'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{x}{b}, \quad a'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (d+c)^2}} = \frac{x}{a}, \quad \cos(\varphi) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

schließlich

$$0 = a \cdot \frac{x}{a} + b \cdot \frac{x}{b} - \left(\frac{x}{a} \cdot b + a \cdot \frac{x}{b}\right) \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot x - x \cdot \frac{b^2 + a^2}{a \cdot b} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

So ergibt sich das Polynom

$$0 = x \cdot \left(4 \cdot a^2 \cdot b^2 - (b^2 + a^2) \cdot (a^2 + b^2 - c^2)\right)$$

Aufgrund des Null-Produkt-Satzes löst $x_1=0$ die Gleichung. Allerdings trägt dieser Wert nichts zum Beispiel bei da sich der Spieler in diesem Falle „neben dem Tor“ befindet und der Winkel dann 0° betragen muss.

Daher wird weiter vereinfacht:

$$0 = 4 \cdot a^2 \cdot b^2 - \left(a^2 + b^2\right)^2 + \left(a^2 + b^2\right) \cdot c^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(a^2 + b^2\right) \cdot c^2$$

Jetzt ergibt das Einsetzen der Wurzelausdrücke das Polynom

$$0 = -\left(\left(x^2 + (d+c)^2\right) - \left(x^2 + d^2\right)\right)^2 + \left(\left(x^2 + (d+c)^2\right) + \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot c^2$$

und nach Vereinfachung

$$0 = -\left(c^2 + 2 \cdot c \cdot d\right)^2 + \left(2 \cdot x^2 + 2 \cdot d^2 + 2 \cdot c \cdot d + c^2\right) \cdot c^2$$

schließlich wegen $c \neq 0$ eine Gleichung 2.Grades

$$0 = x^2 - c \cdot d - d^2$$

mit den beiden Lösungen

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{d \cdot (d+c)}.$$

Der negative Wert scheidet sofort aus da der Spieler in diesem Fall das Tor „von hinten" schießen müsste.

Nun erfolgt die Rechnung mit den konkreten Werten:

Für

$$c = 7.32, \quad d = \frac{64 - 7.32}{2} - 1 = 27.34$$

erhält man $x_3$=30.78. Der dazugehörige Schusswinkel beträgt

$$\varphi = \arccos \frac{30.78^2 + 27.34^2 + 7.32 \cdot 27.34}{\sqrt{30.78^2 + (27.34 + 7.32)^2} \cdot \sqrt{30.78^2 + 27.34^2}} \approx 6.78°$$

Zum Nachweis des Maximums wird die zweite Ableitung von $\varphi$ berechnet. Dazu bestimmt man zuerst

$$b'(x)=\frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad b''(x)=\frac{1\cdot b-x\cdot b'}{b^2}=\frac{1\cdot b-x\cdot\frac{x}{b}}{b^2}=\frac{b^2-x^2}{b^3}$$

$$a'(x)=\frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad a''(x)=\ldots=\frac{a^2-x^2}{a^3}$$

und erhält durch Differenzieren der ersten Ableitung zuerst den etwas unübersichtlichen Ausdruck

$$0=a\cdot a'+b\cdot b'-(a'\cdot b+a\cdot b')\cdot\cos(\varphi)+a\cdot b\cdot\sin(\varphi)\cdot\varphi'$$

$$\Rightarrow$$

$$0=a'^2+a\cdot a''+b'^2+b\cdot b''-(a''\cdot b+2\cdot a'\cdot b'+a\cdot b'')\cdot\cos(\varphi)+(a'\cdot b+a\cdot b')\cdot$$
$$\cdot\sin(\varphi)\cdot\varphi'+(a'\cdot b\cdot\sin(\varphi)+a\cdot b'\cdot\sin(\varphi)+a\cdot b\cdot\cos(\varphi)\cdot\varphi')\cdot\varphi'+a\cdot b\cdot\sin(\varphi)\cdot\varphi''$$

Nachdem nur zu überprüfen ist, ob $\varphi''(x_3)<0$ gilt setzt man $\varphi'(x_3)=0$ ein wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht:

$$0=a'^2+a\cdot a''+b'^2+b\cdot b''-(a''\cdot b+2\cdot a'\cdot b'+a\cdot b'')\cdot\cos(\varphi)+a\cdot b\cdot\sin(\varphi)\cdot\varphi''$$

Diese Gleichung, die nur für $x_{2,3}$ gilt wird nach $\varphi''$ umgeformt

$$\varphi''=\frac{(a''\cdot b+2\cdot a'\cdot b'+a\cdot b'')\cdot\cos(\varphi)-(a'^2+a\cdot a''+b'^2+b\cdot b'')}{a\cdot b\cdot\sin(\varphi)}$$

und wegen

$$a(x_3)\approx 46.356,\quad a'(x_3)\approx 0.664,\quad a''(x_3)\approx 0.012$$

$$b(x_3)\approx 41.171,\quad b'(x_3)\approx 0.747,\quad b''(x_3)\approx 0.011$$

$$\sin(\varphi(x_3))\approx 0.118,\qquad \cos(\varphi(x_3))\approx 0.993$$

erhält man

$$\varphi''(x_3)\approx -0.000124.$$

Daher liegt in $x_3=30.78$ tatsächlich der maximale Schusswinkel $\varphi\approx 6.78°$ vor.

An den Randstellen des Definitionsbereichs $D_x=[0;100]$ liegen keine Maxima vor, da sich dort die Winkel $\varphi(0)=0°$ und $\varphi(100)\approx 3.83°$ ergeben.

Variiert man die Distanz d, dann ergibt sich eine Kurvenschar $\varphi=\varphi(x;d)$. Die lokalen Hochpunkte der Kurvenschar werden durch die beiden Gleichungen

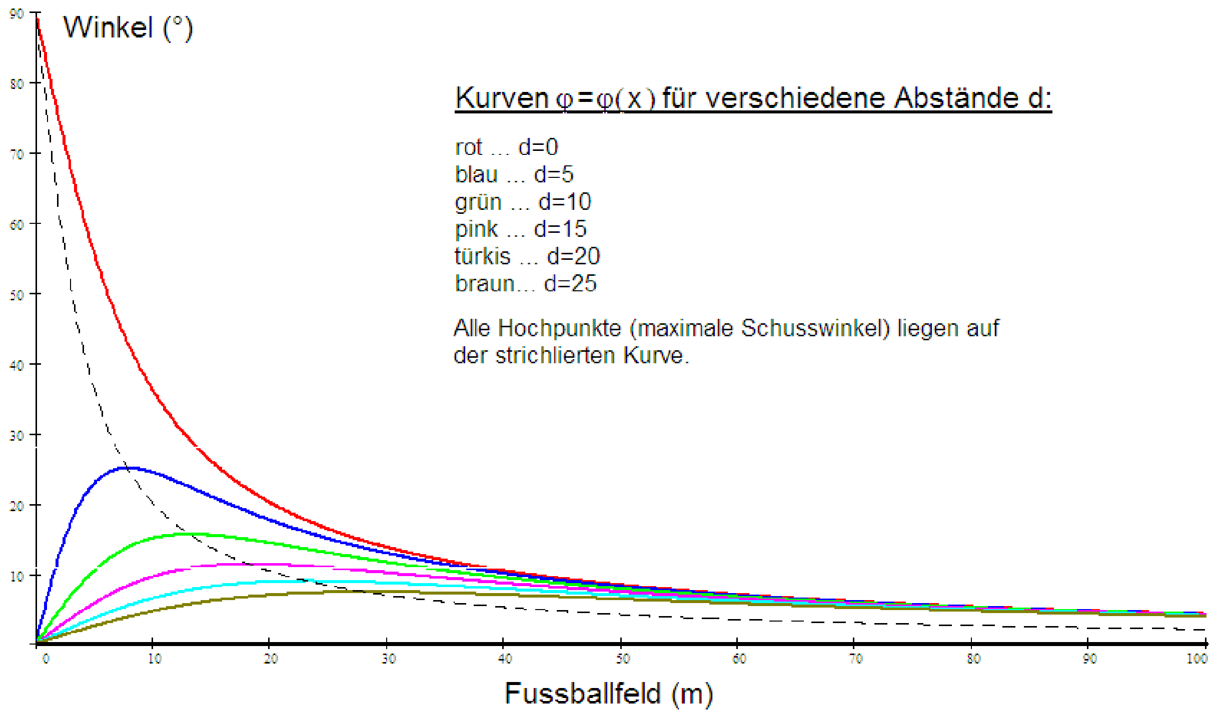
$$\varphi = \arccos \frac{x^2 + d \cdot (d+c)}{\sqrt{x^2 + (d+c)^2} \cdot \sqrt{x^2 + d^2}}$$

und

$$x^2 = d \cdot (d+c)$$

beschrieben, d.h. zusammengefasst durch

$$\begin{aligned}\varphi_{optimal}(x) &= \arccos \frac{2 \cdot x^2}{\sqrt{x^4 + (d+c)^2 \cdot x^2 + d^2 \cdot x^2 + (d+c)^2 \cdot d^2}} = \\ &= \arccos \frac{2 \cdot x^2}{\sqrt{2 \cdot x^4 + x^2 \cdot \left(2 \cdot d^2 + 2 \cdot d \cdot c + c^2\right)}} = \\ &= \arccos \frac{2 \cdot x}{\sqrt{4 \cdot x^2 + c^2}}\end{aligned}$$



b) Durch

$$x(d) = \sqrt{d \cdot (d + c)}$$

wird der Ort aller bester Schusswinkel bei Lauf parallel zur Seitenlinie festgelegt.

Der Definitionsbereich für d lautet hier

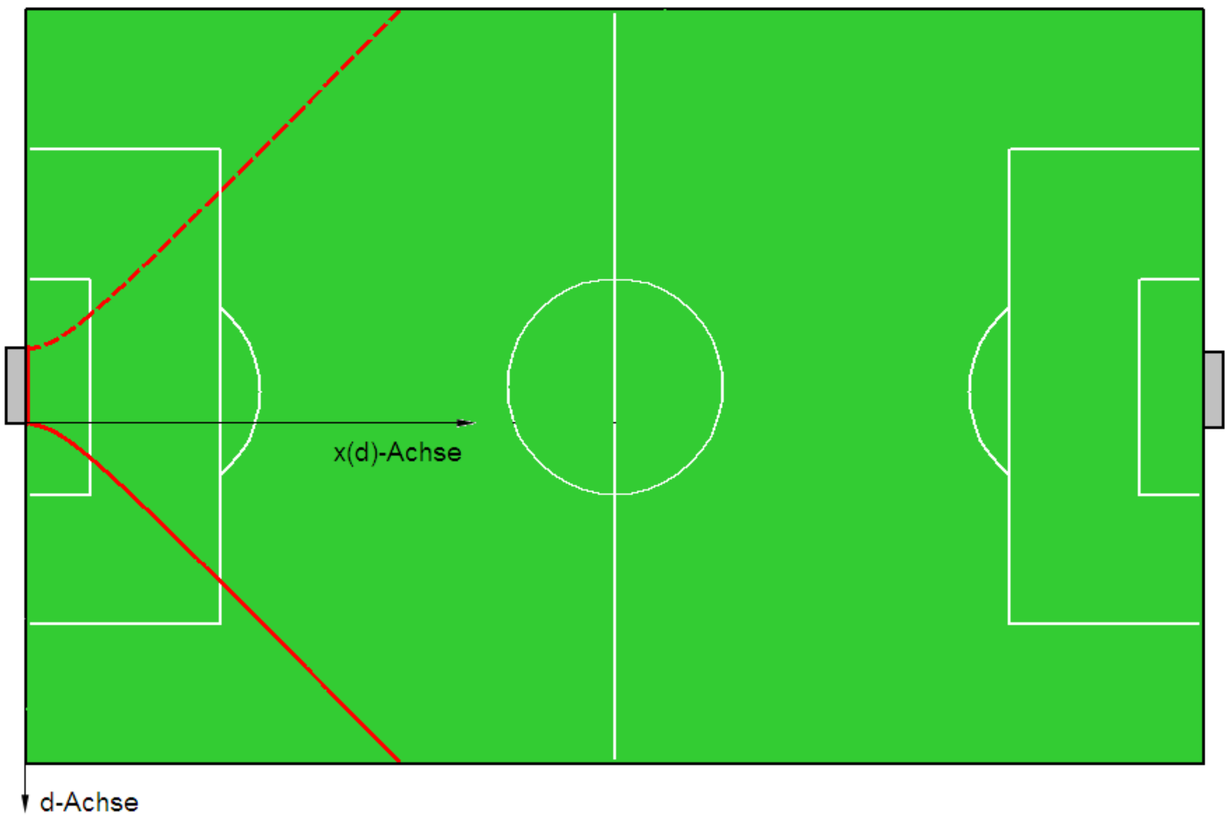
$$D_d = \left[ -\frac{64 + 7.32}{2}; -7.32 \right] \cup \left[ 0; \frac{64 - 7.32}{2} \right] = [-35.66; -7.32] \cup [0; 28.34]$$
.

Aufgrund der Symmetrie von

$$x(d) = \sqrt{d \cdot (d + c)} = x(-d - c)$$

erhält man zwei symmetrische Kurventeile um die Mittellinie d= –c/2. Für d∈]-7.32;0[ ergeben sich reinimaginäre Lösungen für x.

Die Darstellung der Kurve erfolgt wieder in einem CAS. Um den Zusammenhang zum Fußballspiel deutlicher zu machen wurde die Kurve in ein Fußballfeld hinein“montiert“.



Unmittelbar einsichtig ist, dass bei Anlauf „zwischen den Torpfosten“ der maximale Winkel genau auf der Torlinie erreicht wird.

c) Spielt der Spieler den Ball ins linke Eck, dann visiert er den Punkt A an. Dabei legt der Ball bei angenommener Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = 130\frac{km}{h} \approx 36.1\frac{m}{s}$$

die Strecke $a(x_3) \approx 46.36$m in der Zeit

$$t(x_3) = \frac{a(x_3)}{v} \approx 1.28s$$

zurück.

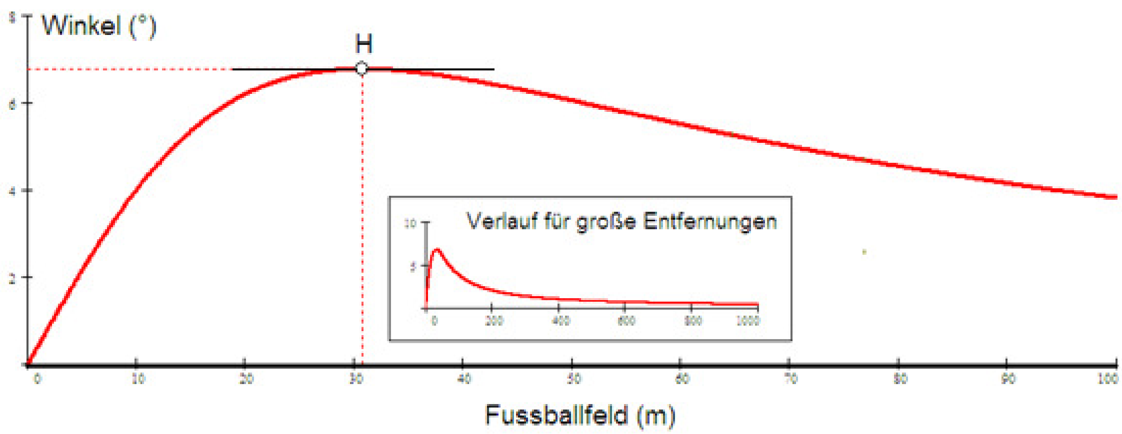
<u>Antwort:</u>

Der optimale Schusswinkel von etwa 6.8° ist erreicht wenn sich der Spieler etwa 31m vor der Torlinie befindet. Von dieser Position aus benötigt der Ball ins linke Eck des Tors 1.3 Sekunden.

Das Diagramm zeigt die Kurve

$$\varphi = \arccos\frac{x^2 + 27.34^2 + 7.32 \cdot 27.34}{\sqrt{x^2 + (27.34 + 7.32)^2} \cdot \sqrt{x^2 + 27.34^2}}$$

für c=7.32 und d=27.34.



## 2.5.3. Verlustminimierung

<u>Aufgabenstellung:</u>

Um das Marktsegment „Spielkonsolen“ nicht kampflos den Konkurrenten zu überlassen fertigt die Firma NOSY Spielkonsolen gemäß der Kostenfunktion K(n) und verkauft sie mit Verlust gemäß der Erlösfunktion E(n).

a) Bei welcher Produktionszahl sind die Produktionskosten minimal?

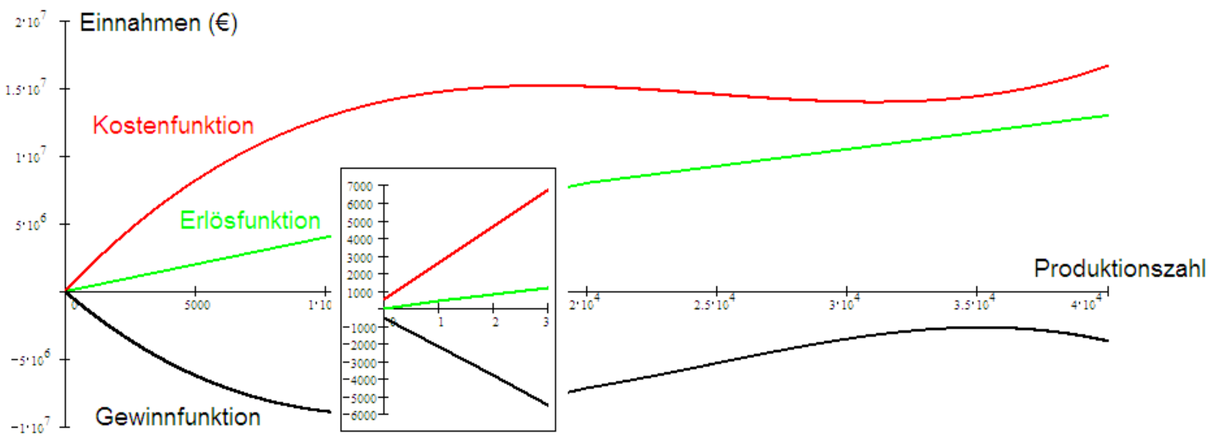
b) Bei welcher Produktionszahl erleidet die Firma den geringsten finanziellen Verlust?

$$K(n) = 0.0000012 \cdot n^3 - 0.089 \cdot n^2 + 2057 \cdot n + 500$$

$$E(n) = \begin{vmatrix} 400 \cdot n & wenn \quad n < 20000 \\ 3000000 + 250 \cdot n & wenn \quad 20000 \le n < 40000 \end{vmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

a) Die Produktionskosten sind im Tiefpunkt der Kostenfunktion K(n) minimal.




Die ersten beiden Ableitungen der Kostenfunktion lauten

$$K(n) = 0.0000012 \cdot n^3 - 0.089 \cdot n^2 + 2057 \cdot n + 500$$
$$K'(n) = 0.0000036 \cdot n^2 - 0.178 \cdot n + 2057$$
$$K''(n) = 0.0000072 \cdot n - 0.178$$

und Nullsetzen der ersten Ableitung liefert die Gleichung

$$0 = 0.0000036 \cdot n^2 - 0.178 \cdot n + 2057$$

mit den beiden Lösungen $n_1$=18413.547 und $n_2$=31030.897. Wegen

$$K''(n_1) = -0.0454 < 0$$

$$K''(n_2) = 0.0454 > 0$$

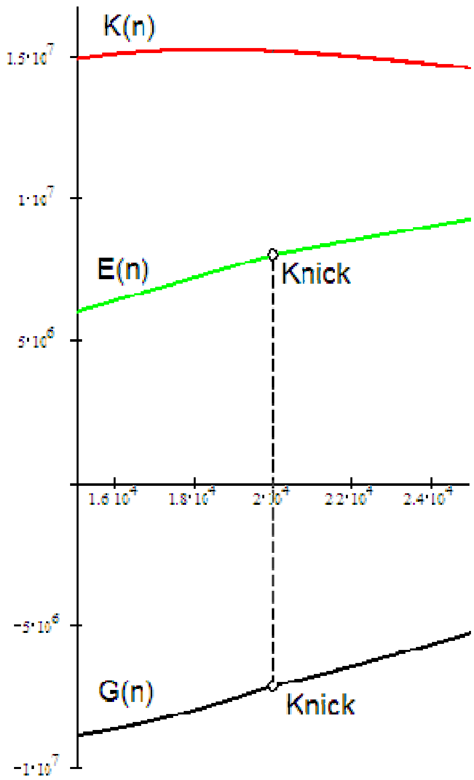
liefert $n_2$=31030.897 das gesuchte lokale Minimum.

Die linke Randstelle des Definitionsbereichs $D_n$=[0;40000] von n liefert zwar ein globales Minimum, welches für die Aufgabe aber vernachlässigbar ist: Zwar treten die geringsten Produktionskosten auf wenn keine einzige Spielkonsole produziert wird aber das entspricht nicht der Firmenstrategie.

Die minimalen Produktionskosten ergeben sich bei Fertigung von 31031 Spielkonsolen und betragen 13987679€, also etwa 14 Millionen €. Der durch–schnittliche Produktionspreis pro Konsole beträgt dann etwa 452€.

b) Nachdem die Gewinnfunktion im Definitionsbereich $D_n$=[0;40000] nur negative Funktionswerte hat tritt der geringste Verlust im Hochpunkt der Gewinnfunktion G(n) auf.

Die Erlösfunktion ist stückweise definiert und hat bei n=20000 einen Knick; daher ist auch die Gewinnfunktion G(n) stückweise zu definieren und hat ebenso bei n=20000 einen Knick.




Daher ergibt sich

$$G(n) = \begin{cases} -0.0000012 \cdot n^3 + 0.089 \cdot n^2 - 1657 \cdot n - 500 \\ \quad wenn \quad n < 2000 \\ \\ -0.0000012 \cdot n^3 + 0.089 \cdot n^2 - 1807 \cdot n - 2999500 \\ \quad wenn \quad 20000 \le n < 40000 \end{cases}$$

Die ersten beiden Ableitungen lauten

$$G'(n) = \begin{vmatrix} -0.0000036 \cdot n^2 + 0.178 \cdot n - 1657 & \quad wenn \quad 0 \leq n < 2000 \\ -0.0000036 \cdot n^2 + 0.178 \cdot n - 1807 & \quad wenn \quad 20000 \leq n < 40000 \end{vmatrix}$$

und

$$G''(n) = -0.0000072 \cdot n + 0.178 \quad in\ ganz\ D_n$$

Zur Bestimmung des Hochpunkts wird die erste Ableitung Null gesetzt und die zwei Gleichungen innerhalb ihrer Definitionsbereiche untersucht:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0000036 \cdot n^2 + 0.178 \cdot n - 1657 && wenn \quad 0 \leq n < 20000 \\ 0 &= -0.0000036 \cdot n^2 + 0.178 \cdot n - 1807 && wenn \quad 20000 \leq n < 40000 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert die Lösungen $n_3$=12437.66 und $n_4$=37006.79, wovon $n_3$ wegen G“($n_3$)=0.088>0 ein Minimum liefert und $n_4$ nicht im Definitionsbereich liegt.

Die zweite Gleichung liefert die Lösungen $n_5$=14270.25 und $n_6$=35174.20, wovon $n_5$ nicht im Definitionsbereich liegt und $n_6$ wegen G“($n_6$)= –0.075>0 das gesuchte Maximum liefert.

Daher ergibt sich der geringste Verlust als G($n_6$)= –2669364.53€.

<u>Antwort:</u>

Bei Produktion von etwa 31031 Spielkonsolen sind die Produktionskosten minimal und betragen etwa 14 Millionen €.

Werden etwa 35174 Spielkonsolen erzeugt und verkauft dann erleidet die Firma den geringsten Verlust in der Höhe von etwa 2.7 Millionen €.

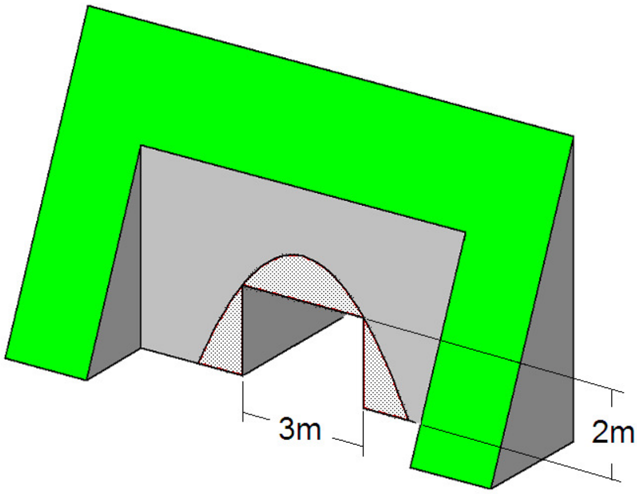
## 2.5.4. Aufweitung eines Stollens

Aufgabenstellung:

Ein Stollen mit rechteckigem Quer–schnitt soll so auf einen parabolischen Querschnitt aufgeweitet werden sodass

a) die Querschnittsfläche minimal (=minimaler Aushub) ,

b) die Querschnittsfläche maximal (=maximaler Luftraum)




wird.

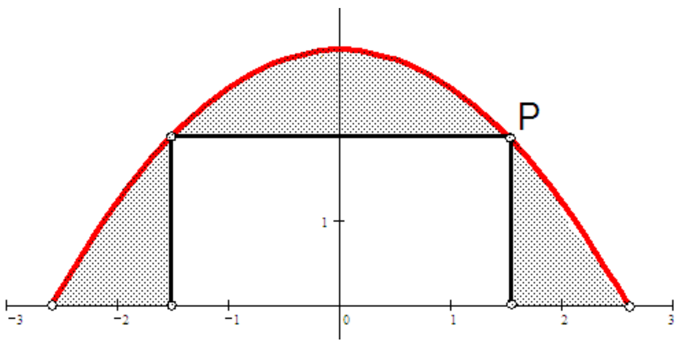
a) Wie lautet die Parabelgleichung bei minimaler Querschnittsfläche? Wie viel m³ Erdreich müssen pro 1m Tunnellänge ausgehoben werden ?

b) Wie lautet die Parabelgleichung bei maximaler Querschnittsfläche? Um wie viel Prozent erhöht sich der Luftraum pro 1m Tunnellänge?

Verwende zur Lösung die Maße aus der Zeichnung.

Lösung:

a) Aufgrund der Wahl des Koordinatensystems (siehe Skizze)




lautet die Darstellung des parabolischen Querschnitts

$$f(x) = -a \cdot x^2 + b.$$

Da der neue Querschnitt auf den Ecken des alten Querschnitts (Stützrechteck) aufsitzen soll ist ein Parabelpunkt P=(1.5/2) bekannt.

Durch Einsetzen in die Funktion ergibt sich die Nebenbedingung

$$2 = -a \cdot 1.5^2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 2 + 2.25 \cdot a$$

Der Definitionsbereich $D_a$ für a ergibt sich wegen a>0 und b>2 – der Scheitel liegt höher als die Stützpunkte – als $D_a=]0;\infty[$.

Die Hauptbedingung lautet, dass der von der Parabel f und der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt maximal sein soll. Daher sind zuerst die Nullstellen von f zu bestimmen

$$0 = -a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

und danach ist der Flächeninhalt durch Integration zu berechnen

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} -a \cdot x^2 + b\,dx = 2 \cdot \left[\frac{-a \cdot x^3}{3} + b \cdot x\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \left(\frac{-a}{3} \cdot \frac{b}{a} + b\right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{b^3}{a}}$$

Unter Verwendung der Nebenbedingung ergibt sich damit

$$A(a) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{(2 + 2.25 \cdot a)^3}{a}}$$

Um die Rechnung zu vereinfachen betrachten wir nun die vereinfachte Funktion

$$\overline{A}(a) = \frac{(2 + 2.25 \cdot a)^3}{a}$$

sowie ihre Ableitungen

$$\overline{A}'(a) = \frac{(2 + 2.25 \cdot a)^2 \cdot (4.5 \cdot a - 2)}{a^2}$$

$$\overline{A}''(a) = \frac{(2+2.25\cdot a)\cdot(10.125\cdot a^2 - 9\cdot a + 8)}{a^3}$$

Da das Weglassen des positiven Vorfaktors und der Wurzel das Vorzeichen von A nicht ändert, haben $\overline{A}$ und A dieselben Extremstellen.

Nach Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt sich eine extremwertverdächtige Stelle

$$a_{\min} = \frac{2}{4.5} = \frac{4}{9} \approx 0.44$$

die sich wegen

$$\overline{A}''(a_{\min}) = 205.03125 > 0$$

als lokaler Tiefpunkt herausstellt.

Es gibt keine Randextrema, da im Definitionsbereich sowohl

$$\lim_{a\to 0} A(a) = \lim_{a\to 0} \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{(2+2.25\cdot a)^3}{a}} \to \infty$$

als auch

$$\lim_{a\to \infty} A(a) = \lim_{a\to \infty} \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{(2+2.25\cdot a)^3}{a}} \to \infty$$

über alle Grenzen wachsen.

Daraus ergibt sich nun insgesamt die Funktionsgleichung aus

$$b = 2 + 2.25\cdot\frac{4}{9} \quad\Rightarrow\quad b = 3,$$

als

$$f(x) = -\frac{4}{9}\cdot x^2 + 3$$

und die parabolische Querschnittsfläche als

$$A\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{\left(2+2.25\cdot\frac{4}{9}\right)^3}{\frac{4}{9}}}=6\cdot\sqrt{3}$$

Der Aushub V je 1m Tunnellänge beträgt damit

$$V=\left[A\left(\frac{4}{9}\right)-2\cdot 1.5\cdot 2\right]\cdot 1=6\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\approx 4.4$$

b) Aus der Rechnung in a) erkennt man dass es kein lokales Maximum gibt und auch die Randstellen keine sinnvollen Lösungen liefern.

<u>Antwort:</u>

Die Lösungsfunktion lautet

$$f(x)=-\frac{4}{9}\cdot x^2+3$$

Es müssen ca. $4.4m^3$ Erdreich je Meter Tunnellänge ausgehoben werden.

Es gibt kein Maximum. Damit gibt es für Frage b) keine Lösung.

# 3. Integralrechnung

Die Integralrechnung ist ihrem Wesen nach weitaus älter als die Differentialrechnung.

- Schon Eudoxos von Knidos (um 370 v.Chr) erfand die Exhaustionsmethode, mit derer Hilfe er die Inhaltsformeln von Pyramide und Kegel bewies.
- Archimedes (287?–212 v.Chr.) gab in seinen Werken u.a. strenge Beweise für Flächeninhalts–, Oberflächen– und Volumsformeln an. Nachdem er auch die Exhaustionsmethode verwendete, gilt er in gewisser Weise als Begründer der Integralrechnung.
- Pappos von Alexandria (um 320 v.Chr.) gilt als letzter bedeutender Mathematiker des Altertums. Ihm haben wir den heute als „Guldinsche Regel" bekannten Satz über das Volumen eines Drehkörpers zu verdanken.
- Wie auch schon im Kapitel „Differentialrechnung" möchte ich an dieser Stelle wieder Jordanus Nemorarius erwähnen, der Rechengesetze mit Buchstaben als Platzhalter für frei wählbare Zahlen zu formulieren vermochte, ebenso wie Thomas Bradwardine (um 1300), der Stetigkeitsfragen behandelte und schließlich Nikolaus Oresme (um 1350), der erstmals Funktionen graphisch darstellte und Summen unendlicher Reihen auf geometrischen oder rechnerischen Weg ermittelte.

Die bekannten Namen zum Thema Integralrechnung sind aber:

- Johannes Kepler (1571–1630) bestimmt den Rauminhalt von Fässern verschiedenen Querschnitts mithilfe von Differentialen.
- Bonaventura Cavalieri (um 1630) entdeckte das nach ihm benannte Cavalieri-Prinzip und entdeckte die Formel

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot a^{n+1}.$$

- Gregorius a San Vincentio (um 1640) fand u.a. die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe und die Volumsformel für den Zylinderhuf.
- Pierre de Fermat (1608–1665) gab Quadraturen für verschiedene Kurven an.

- Evangelista Torricelli führte die Quadratur der Parabel durch und berechnete das Volumen des Drehhyperboloids.
- Auch der Holländer Christiaan Huygens, die Engländer John Wallis, James Gregory und Isaac Barrow leisteten unverzichtbare Beiträge auf dem Weg zum Integralbegriff.
- Blaise Pascal (um 1650) lieferte in seinen letzten Lebensjahre einige wertvolle kleinere Beiträge.

Jetzt ist der Weg gebahnt für die Integralrechnung:

- Isaac Newton (1643–1727) erfand die Differential– und Integralrechnung. In seinen 1669 und 1671 verfassten Publikationen finden sich neben umfassender Quadraturmethoden durch Reihenentwicklungen auch Rektifikations- und Krümmungsprobleme.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) entdeckte unabhängig von Newton ebenfalls die Differential– und Integralrechnung und schuf die heute noch gebräuchliche Symbolik.
- Die Streitigkeiten über die Urheberschaft begannen 1685 und dauerten bis zum Tod der beiden Mathematiker.
- Jakob und Johann Bernoulli, zwei Schüler von Leibniz, sind nun ebenso zu erwähnen. Ein Schüler von Johann war nämlich Leonhard Euler (1707–1783), der als Stammvater der Analysis gilt. Er fasste die mathematischen Erkenntnisse strukturiert in einem zweibändigen Werk zusammen und stellte erstmals den Begriff „Funktion“ in den Mittelpunkt.
- Adrien Marie Legrende (1752–1833) entdeckte zusammen mit Carl Friedrich Gauss die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zum Ausgleich von Beobachtungsfehlern und baute die Theorie der elliptischen Integrale weiter aus.
- Ausgustin–Louis Cauchy (1789-1867) gab mehrere Konvergenzkriterien für Folgen und Reihen an.

- Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) sorgte für eine gesicherte Basis beim bestimmten Integral, indem er den Riemannschen Integralbegriff einführte.
- Mit David Hilbert (1862–1943) soll die Geschichte der Integralrechnung, soweit sie im Schulunterricht Platz findet, ein Ende haben. Hilbert gilt als letztes Universalgenie, welches die Mathematik in ihrer Gesamtheit noch zu überschauen und beherrschen vermochte.

Damit schließt sich der geschichtliche Teil zum Thema Integralrechnung.

## 3.1. Lehrplanbezug

### 3.1.1. Lehrplan der 8. Klasse AHS

Integralrechnung

- Ermitteln von Stammfunktionen
- Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten“ der Form $f(x)\cdot\Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals
- Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
- Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln
- Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächen–inhalt, Volumen, physikalische Deutungen)

### 3.1.2. Lehrplan der 3. Klasse HTL (16 Stunden in 5 Jahrgängen)

Analysis

- Integralrechnung (bestimmtes und unbestimmtes Integral, Integration elementarer Funktionen, Anwendungen der Integralrechnung)

Numerische Mathematik

- numerische Integration

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechen–hilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik

### 3.1.3. Lehrplan der 4. Klasse HTL (16 Stunden in 5 Jahrgängen)

Analysis

- Funktionenreihen (Fourierreihen)

Anwendungen aus dem Fachgebiet

Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik

### 3.1.4. Lehrplan der 5. Klasse HTL (16 Stunden in 5 Jahrgängen)

Aktuelle Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Fachrichtung

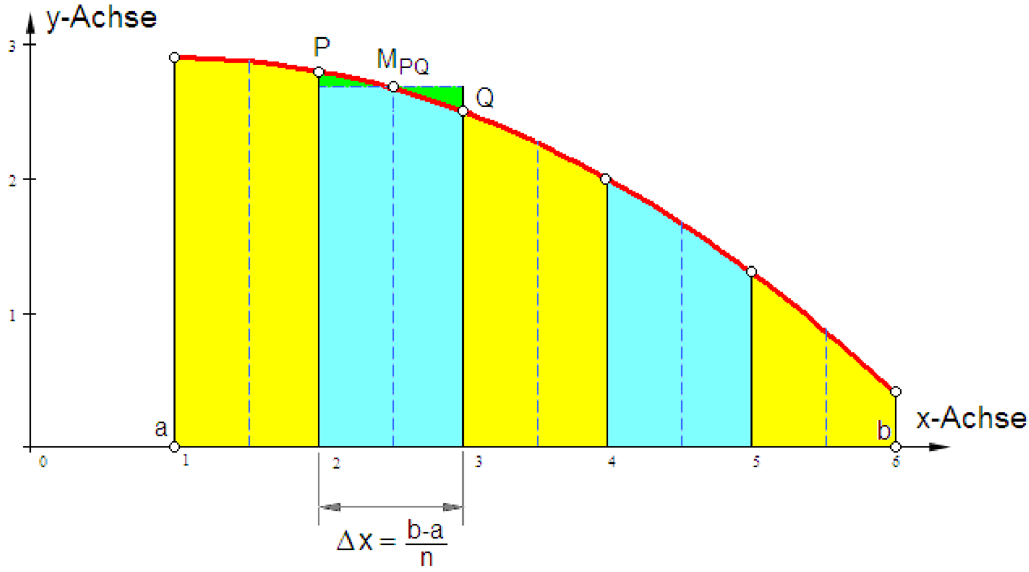
Anwendungen aus dem Fachgebiet

Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik

## 3.2. Kurzabriss Theorie

### 3.2.1. Begriffe rund ums Integral

y=f(x) sei eine im Intervall [a;b] beschränkte und stetige Funktion.




Man zerlege das Intervall [a;b] in n äquidistante Teilintervalle mit Breite

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und bilde die Rechteckssumme $R_n$.

Existiert der Grenzwert R der Rechteckssumme $R_n$ für $n \rightarrow \infty$, dann ist y=f(x) in [a;b] integrierbar. Der Grenzwert R wird dann bestimmtes Integral von y=f(x) in [a;b] genannt und man schreibt dafür

$$R = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Ist y=f(x) eine im Intervall [a;b] definierte Funktion, dann heißt F(x) eine Stammfunktion von f(x), wenn F'(x)=f(x). Das Bestimmen der Stammfunktion heißt Integrieren.

Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), dann heißen alle Funktionen F(x)+C mit C=konstant das unbestimmte Integral von f(x) und man schreibt dafür

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Ist y=f(x) eine im Intervall [a;b] stetige Funktion und F(x) eine beliebige Stammfunktion von f(x), dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

## 3.2.2. Flächeninhalt, Mittelwerte, Volumen, Bogenlänge

Gilt für eine Funktion f im Intervall [a;b] stets f(x)≥0, dann lässt sich das bestimmte Integral als Inhalt jener Fläche deuten, die von f, der x–Achse und zwei y–parallelen Geraden x=a und x=b eingeschlossen wird.

Ist y=f(x) im Intervall [a;b] integrierbar, dann definiert man folgende drei Mittelwerte:

$$m_{linear} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad m_{Betrag} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f(x)|dx, \qquad m_{quadratisch} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f^2(x)dx}$$

Zerlegt man einen Körper der Höhe h in waagrechte Schichten, die den Flächeninhalt A(z) aufweisen, dann gilt für das Volumen des Körpers

$$V = \int_{z=0}^{z=h} A(z)dz$$

Die Bogenlänge einer Kurve y=f(x) im Intervall [a;b] ergibt sich durch

$$s = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Die Herleitung der Bogenlängenformel erfolgt in 3.5.1.

### 3.2.3. Kleine Formelsammlung

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; wenn \; n \neq -1$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

Es sei f=f(x), g=g(x) und λ=konstant:

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int f$$

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

## 3.3. Mittelwert

Der Begriff des Mittelwerts begleitet uns durch das ganze Leben. Daher finde ich es interessant, nicht nur diskrete Mittelwerte zu bestimmen sondern auch Mittelwerte von Funktionen.

Mittelwerte von Funktionen können oft sowohl

- elementar unter Verwendung von Flächenformeln als auch
- mithilfe der formelmäßigen Integration bestimmt werden.

Gerade darin liegt für mich der Reiz: Es wird mit unterschiedlichen Methoden operiert, es werden die Begriffe Flächeninhalt, orientierter Flächeninhalt und die Nullstellenproblematik behandelt.

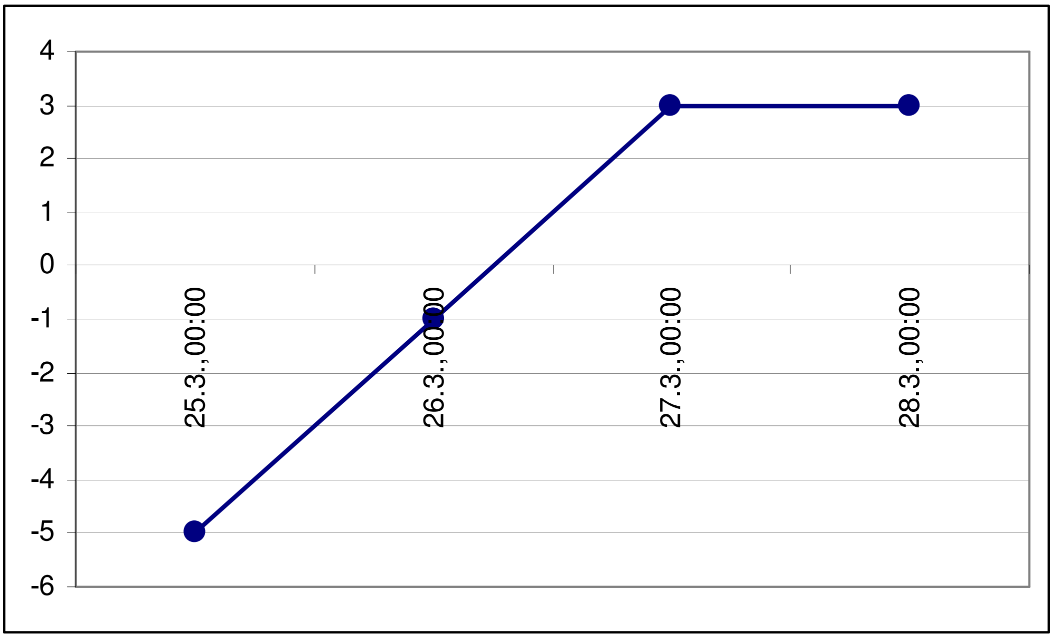
<u>Kurz zu den Beispielen:</u>

- In der ersten Aufgabe werden ein diskreter arithmetischer Mittelwert sowie der lineare Mittelwert auf zwei Arten berechnet. Hier sieht man sehr schön die unterschiedlichen rechnerischen Zugänge.
- In der zweiten Aufgabe wird zusätzlich durch die Messwerte ein Polynom gelegt und der daraus resultierende Mittelwert berechnet. Hier sieht man sehr schön, dass die Interpolation mit einem Polynom höheren Grades zwar im Mittel ganz gut aussehen, als Ganzes gesehen aber sehr unrealistisch sein kann.
- In der dritten Aufgabe wird zuerst der Begriff der lokalen Extremstelle wiederholt bevor der lineare Mittelwert und der Betragsmittelwert bestimmt werden. Dadurch stellt dieses Beispiel wieder eine Steigerung im Vergleich zu den vorherigen Aufgaben dar, da hier ein neuer Mittelwertbegriff sinnvoll eingeführt wird.
- Die vierte Aufgabe entführt uns in den Bereich der Elektronik und führt zu den Begriffen Gleichrichtwert und Effektivwert. Während es sich bei ersterem nur um den Betragsmittelwert handelt, ist letzterer der quadratische Mittelwert. Nebenbei muss eine stückweise linearen Funktion definiert werden.

### 3.3.1. Mittlere Lufttemperatur

Aufgabenstellung:

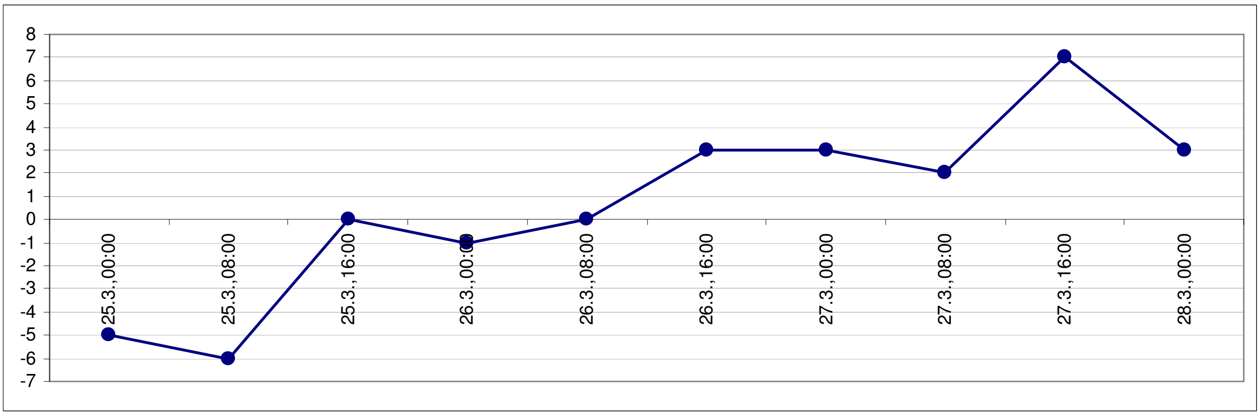
In einer österreichischen Stadt wird die Lufttemperatur (℃) in regelmäßigen Abständen gemessen und dokumentiert. Das Diagramm zeigt jene Mess–ergebnisse, die öffentlich bekannt gegeben wurden.




a) Welche Funktion beschreibt den von der Zeit abhängigen Temperaturverlauf?

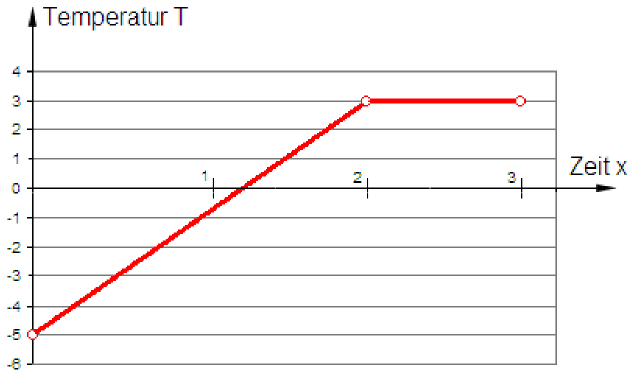
b) Wie groß ist die mittlere Lufttemperatur? Berechne auf zwei Arten.

c) Wie groß ist die mittlere Lufttemperatur, wenn man von einer umfangreicheren Messreihe (siehe Diagramm) ausgeht?



Lösung:

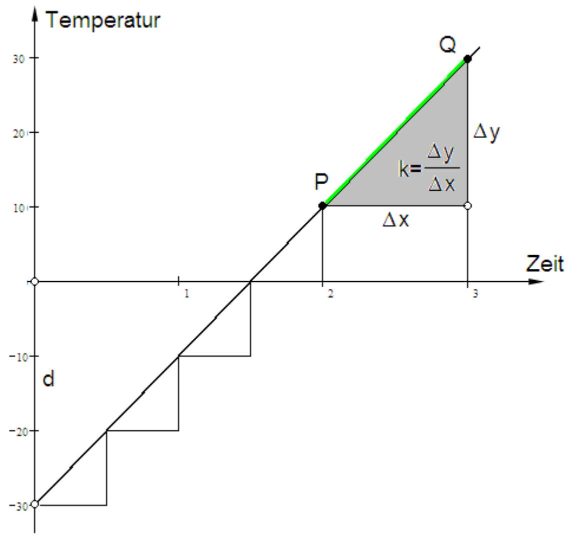
a) Als T=T(x) bezeichnet man die Funktion, welche die Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit x beschreibt. Als Einheit der Zeit x werden Tage angenommen.




$$T(x) = \begin{cases} 4 \cdot x - 5, & wenn \ \ 0 \le x \le 2 \\ 3, & wenn \ \ 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Die Strecken werden dabei durch lineare Funktionen y=k·x+d beschrieben.

Die Anstiege k=Δy/Δx werden mithilfe geeigneter Steigungsdreiecke berechnet, die Ordinatenabstände d entweder graphisch (siehe Abbildung rechts) oder rechnerisch durch Einsetzen eines Punktes in d=y–k·x bestimmt.



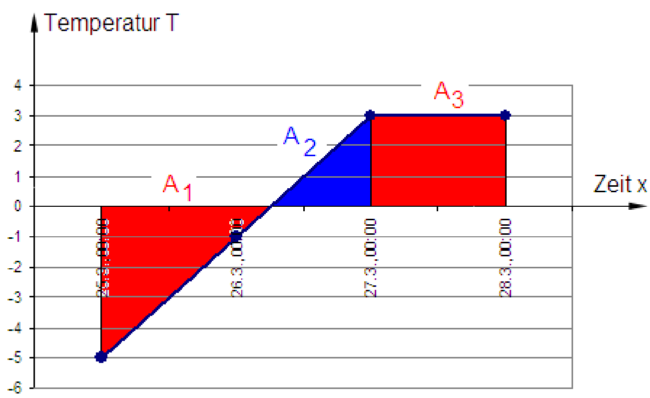

b) Der lineare Mittelwert

$$m_l = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

wird auf zwei Arten berechnet:

b1) Berechnung des Integrals durch Flächenformeln:

Mithilfe des Strahlensatzes werden Längen Δx und Breiten Δy der Dreiecke ermittelt. Wegen 1:4=Δx:5 beträgt der Flächeninhalt des linken Dreiecks



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{25}{8}$$

und für das rechte Dreieck ergibt sich durch analoge Rechnung

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{8}$$

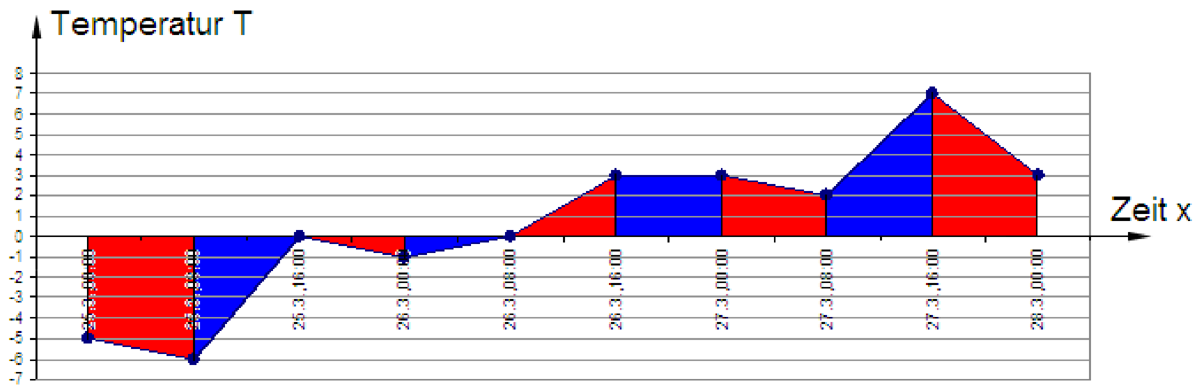
Die Rechtsecksfläche beträgt $A_3 = 1 \cdot 3 = 3$ und damit erhält man

$$m_l = \frac{1}{3-0} \cdot (-A_1 + A_2 + A_3) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{25}{8} + \frac{9}{8} + \frac{24}{8}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{8} \approx 0.33$$

b2) Berechnung des Integrals mithilfe der Funktion T(x):

$$m_l = \frac{1}{3-0} \cdot \left( \int_0^2 4 \cdot x - 5\, dx + \int_2^3 3\, dx \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( \left[2 \cdot x^2 - 5 \cdot x\right]_0^2 + \left[3 \cdot x\right]_2^3 \right) = \frac{1}{3} \cdot (-2 + 3) \approx 0.33$$

c) Den linearen Mittelwert bei einer umfangreicheren Messreihe ermittelt man auf elementare Weise mithilfe von Dreiecks– und Trapezflächen.




$$m_l = \frac{1}{6-0} \cdot \left( \frac{-5-6}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{-6}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3+2}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2+7}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7+3}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{-11}{6} - 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{5}{6} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} \right) = \frac{7}{18} \approx 0.39$$

Antwort:

Der Temperaturverlauf der „kleinen Messreihe“ wird durch

$$T(x)=\begin{cases} 4\cdot x-5, & wenn\ \ 0\le x\le 2 \\ 3, & wenn\ \ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

beschrieben, der lineare Mittelwert dieses Temperaturverlaufes lautet $m_l \approx 0.33$°C. Setzt man die umfangreichere Messreihe voraus, dann ergibt sich ein linearer Mittelwert $m_l \approx 0.39$°C.

### 3.3.2. Schwebestaub

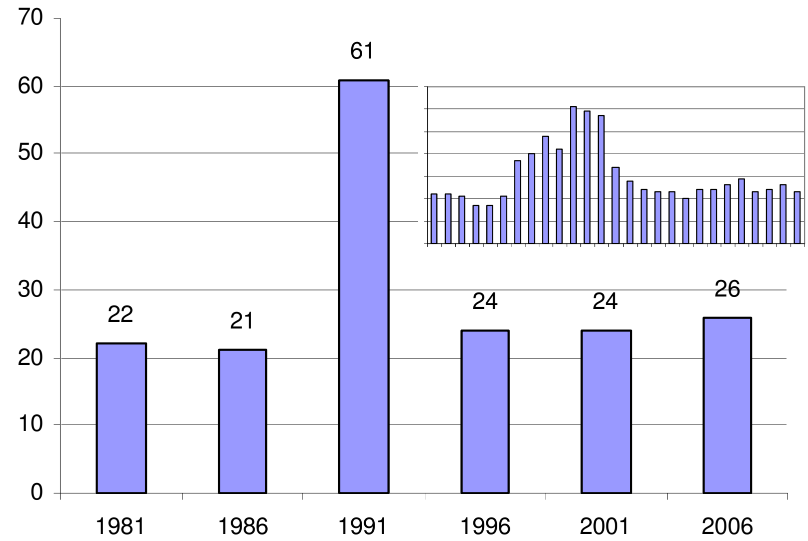
Aufgabenstellung:

In einer 27 Jahre dauernden Studie wurde in einer Stadt der Anteil des Schwebestaubs (in µg/m³) in der Luft gemessen und die Jahresmittelwerte errechnet. Sechs dieser Messwerte werden bekannt gegeben.

Wie groß ist der mittlere Anteil des Schwebestaubs in der Luft, wenn man

a) von diskreten Mess–werten ausgeht?

b) davon ausgeht, dass die Anteile zwischen den Messungen linear zu– bzw. abnehmen?




c) annimmt, dass die Zu– und Abnahme der Konzentration durch ein eine Polynomfunktion beschrieben werden kann.

d) Welches Berechnungsmodell beschreibt die Situation am Besten wenn der aus allen Messungen ermittelte Durchschnittswert 30.19 µg/m³ beträgt?

Entnimm die Daten dem Diagramm.

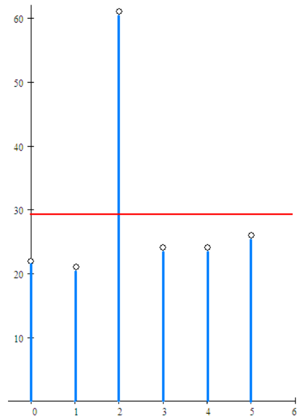
Lösung:

Zuerst werden die Daten in einer Tabelle neu erfasst; dabei wird anstelle der in der Angabe vorgegebenen Zeitrechnung nun ein willkürlicher Nullpunkt gewählt und von dort an fortlaufende ganzzahlig durchnummeriert.

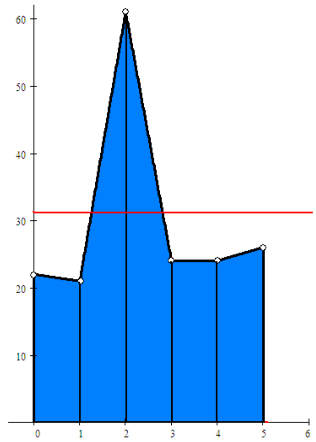
| Jahr | 1981 | 1986 | 1991 | 1996 | 2001 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Schwebestaub | 22 | 21 | 61 | 24 | 24 | 26 |

a) Geht man von nur sechs diskreten Messwerten aus, dann lautet der Mittelwert

$$m_6 = \frac{22+21+61+24+24+26}{6} = 29.67$$




b) Nehmen die Anteile zwischen den Messwerten linear zu bzw. ab, dann erhält man durch lineare Interpolation eine stückweise lineare Funktion f:




Hier ist der lineare Mittelwert

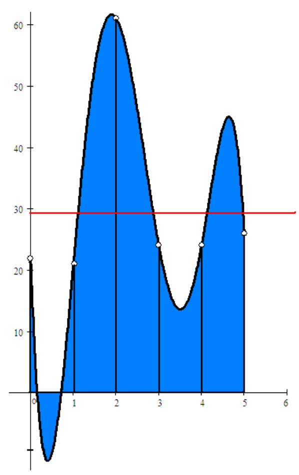
$$m_l = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

einer Funktion f gesucht. Aufgrund der stückweise linearen Form der Funktion kann hier auf formelmäßige Integration verzichtet werden, wodurch auch das Aufstellen der konkreten Funktion entfallen kann. Stattdessen erfolgt die Flächenberechnung auf elementare Weise mithilfe von Trapezflächen

$$m_l = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{22+21}{2} \cdot 1 + \frac{21+61}{2} \cdot 1 + \frac{61+24}{2} \cdot 1 + \frac{24+24}{2} \cdot 1 + \frac{24+26}{2} \cdot 1 \right) = 30.800$$

c) Nachdem sechs Messwerte gegeben sind, bestimmt man zuerst eine Polynomfunktion 5.Grades

$$f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f ,$$




die durch die Messwerte verläuft. Einsetzen der Punkte in die Funktion liefert ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a, b, ..., f die in einem Vektor

$$z^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden. Das Gleichungssystem ist der Form M·z=n; es wird mithilfe eines CAS durch Matrizenrechnung als z= $M^{-1}$·n gelöst.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^5 & 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^5 & 4^4 & 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 5^5 & 5^4 & 5^3 & 5^2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ 61 \\ 24 \\ 24 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -3.175 \\ 41.417 \\ -188.792 \\ 344.583 \\ -195.033 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Funktion

$$f(x) = -3.175 \cdot x^5 + 41.417 \cdot x^4 - 188.792 \cdot x^3 + 344.583 \cdot x^2 - 195.033 \cdot x + 22$$

Der lineare Mittelwert errechnet sich wieder aus

$$m_l = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

als

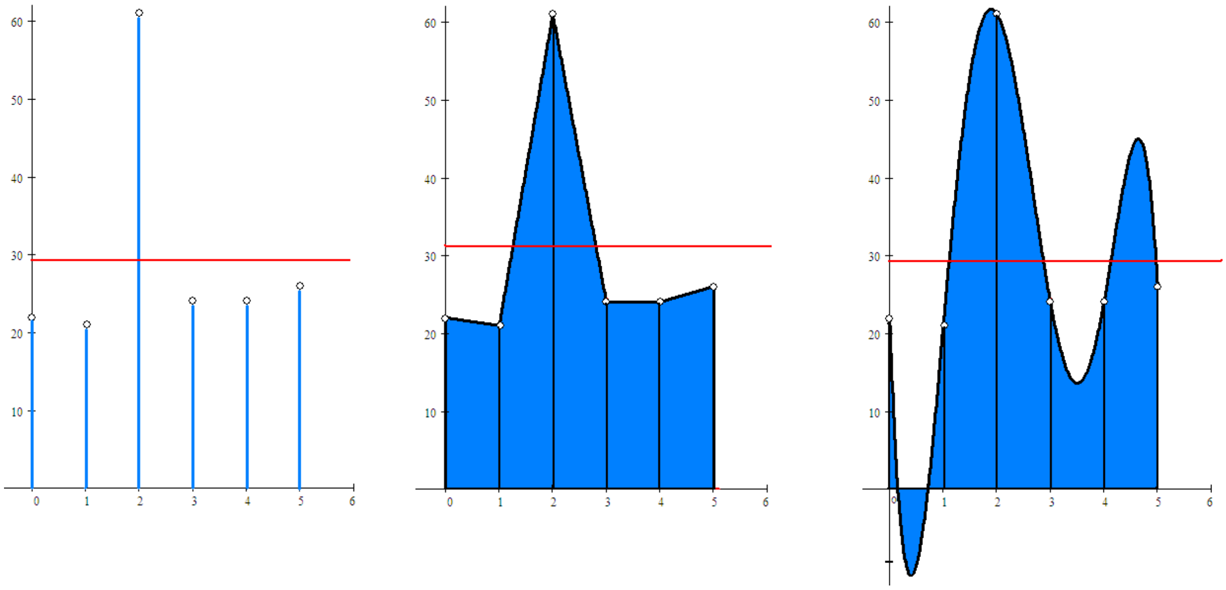
$$m_l = \frac{1}{5-0} \cdot \int_0^5 -3.175 \cdot x^5 + 41.417 \cdot x^4 - 188.792 \cdot x^3 + 344.583 \cdot x^2 - 195.033 \cdot x + 22 \, dx \approx 29.64$$

<u>Antwort:</u>

Der Mittelwert der sechs Messwerte ergibt den Wert 29.67, der Mittelwert des linear interpolierten Verlaufs 30.80 und der des durch ein Polynom interpolierten Verlaufs 29.64.

Im Vergleich zum Mittelwert 30.19 der 27 Messwerte zeigt sich, dass das Modell des linear interpolierten Verlaufs die Situation am besten beschreibt.

Im Vergleich der Diagramme ergibt sich weiters:



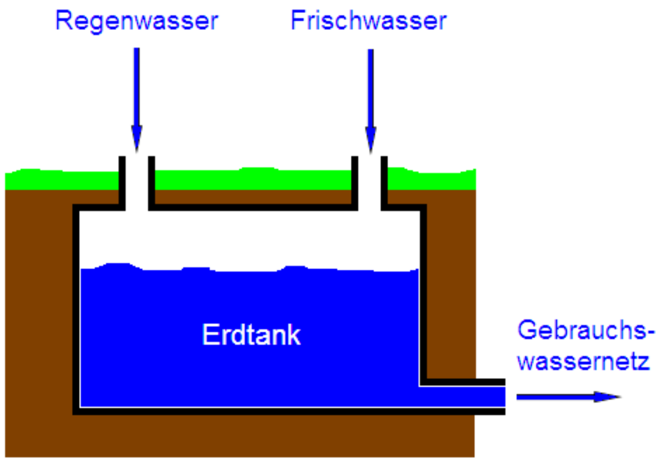

Die Annäherung mit dem Polynom ergibt zwar einen guten Näherungswert für den mittleren Schwebestaubanteil, die Funktion selbst beschreibt die Anteile allerdings unrealistisch, wie man speziell aus den „negativen Anteilen“ erkennen kann.

## 3.3.3. Regenwassernutzung

Aufgabestellung:

Eine Familie nutzt Regenwasser zur Bewässerung des Gartens und im Haushalt (WC).

Dazu wird Regenwasser in einem 2 m hohen Erdtank gesammelt und der Tank in regenarmen Zeiten auch mit Frischwasser gefüllt („Nachspeise–system“).




Man kann annehmen, dass der Füllstand sich an einem Regentag um etwa 6 cm erhöht, sich durch Bewässern des Gartens um etwa 6 cm und durch Nutzung im Sanitärbereich (WC) um etwa 2 cm pro Tag verringert. Dann kann der Füllstand (in cm) des Regenwassertanks in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden.

$$h(t) = -0.2 \cdot x^3 + 3.6 \cdot x^2 - 15.2 \cdot x + 150, \quad t \in [0\,;13]$$

Der Hersteller empfiehlt eine Sollfüllhöhe von $h_0$=150cm.

a) Stelle die Funktion mithilfe eines CAS dar.

b) Wann wurde die maximale, wann die minimale Füllhöhe erreicht?

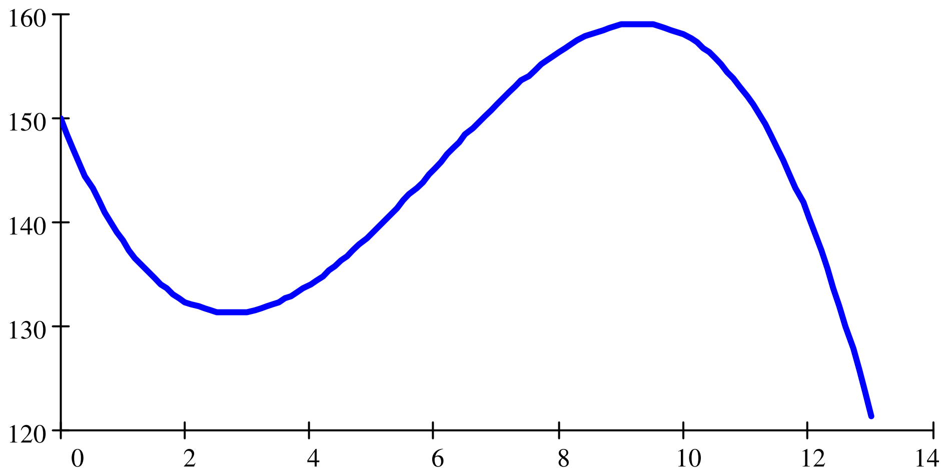
c) Wie groß ist die mittlere Füllhöhe?

d) Wie groß ist die mittlere Abweichung von der Sollfüllhöhe?

Löse die Aufgabe unter Verwendung eines CAS.Lösung:

a) Unter Verwendung des CAS MathCad ergibt sich

$x := 0, 0.1 .. 13 \qquad h(x) := -0.2 \cdot x^3 + 3.6 \cdot x^2 - 15.2 \cdot x + 150$




b) Wie schon aus dem Diagramm in a) ersichtlich ist, treten die maximale Füllhöhe als lokales Maximum und die minimale Füllhöhe als globales Minimum (am rechten Rand) auf. Die Rechnung erfolgt wieder mit MathCad.

Zuerst werden die ersten beiden Ableitungen

$$h_{ersteAbleitung}(x) := \frac{d}{dx} h(x) \qquad h_{zweiteAbleitung}(x) := \frac{d^2}{dx^2} h(x)$$

gebildet. Die Bestimmung der lokalen Extremstellen erfolgt näherungsweise, wobei die Startwerte und der Typ der Extremstelle für die Näherungsrechnung aus der Diagramm entnommen werden.

$$x := 1$$

$$x_{lokalesMinimum} := wurzel\left(h_{ersteAbleitung}(x), x\right) \qquad x_{lokalesMinimum} = 2.734$$

$$h_{zweiteAbleitung}\left(x_{lokalesMinimum}\right) = 3.919$$

$$h\left(x_{lokalesMinimum}\right) = 131.265$$

Die Kontrolle mit der zweiten Ableitung zeigt, dass tatsächlich ein lokales Minimum vorliegt.

$$x := 10$$

$$x_{lokalesMaximum} := wurzel\left(h_{ersteAbleitung}(x), x\right) \qquad x_{lolakesMaximum} = 9.266$$

$$h_{zweiteAbleitung}\left(x_{lokalesMaximum}\right) = -3.919$$

$$h\left(x_{lokalesMaximum}\right) = 159.135$$

Die Kontrolle mit der zweiten Ableitung zeigt, dass tatsächlich ein lokales Maximum vorliegt.

Die Überprüfung der Randstellen durch h(0)=150 und h(13)=121.4 zeigt:

Zum Zeitpunkt x=9.266 herrscht der höchste Füllstand h(9.266)≈159cm, zum Zeitpunkt x=13 der niedrigste Füllstand h(13)≈121.4cm.

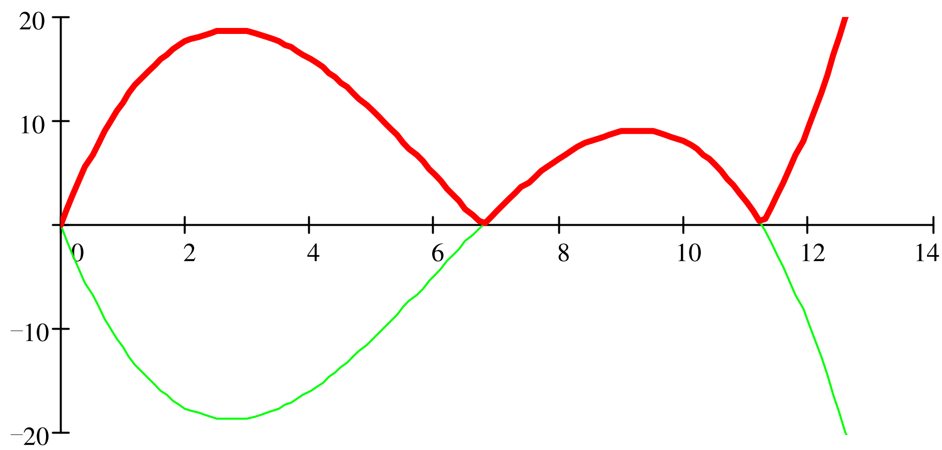
c) Die mittlere Füllhöhe $h_{linear}$ ist der lineare Mittelwert der Füllhöhen und wird durch

$$h_{linear} = \frac{1}{13} \cdot \int_0^{13} h(x)\,dx \qquad\qquad h_{linear} = 144.15$$

berechnet.

d) Die mittlere Abweichung vom Sollwert $h_0$=150 ist der Betragsmittelwert der Funktion $a(x)=h(x)-h_0$ im Intervall [0;13].

Das Diagramm zeigt die Funktion a(x) als dünne, grüne Kurve und die Funktion |a(x)| als dicke, rote Kurve:

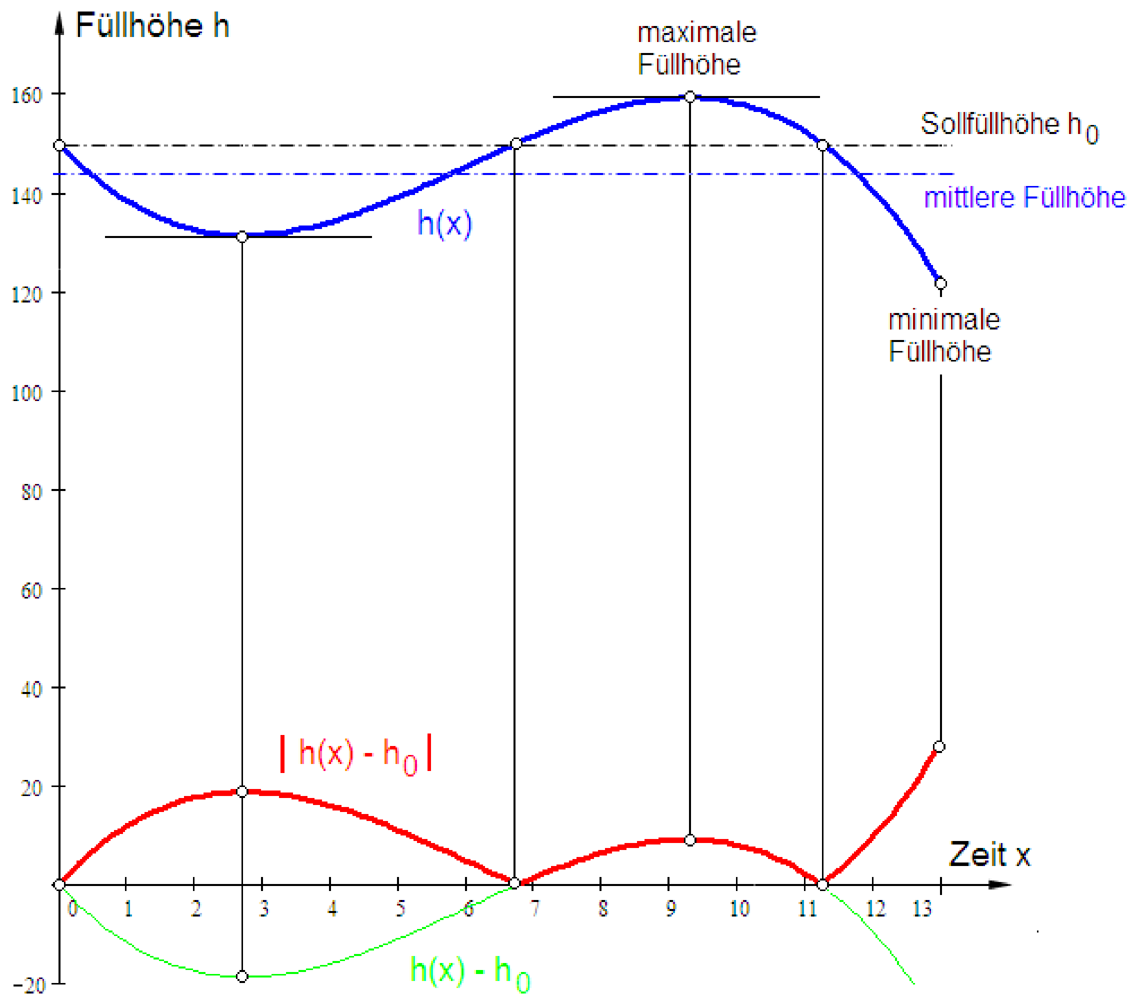



Die Berechnung des Betragsmittelwerts erfolgt durch

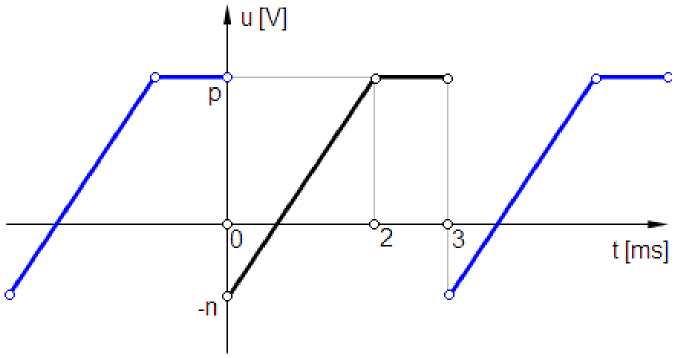
$$a_{betrag} = \frac{1}{13} \cdot \int_{0}^{13} |h(x) - 150| \cdot dx \qquad a_{betrag} = 9.978$$

Antwort:

Der höchste Füllstand wird mit etwa 159cm zwischen Tag 9 und 10 erreicht. Am Tag 13 ist der Füllstand mit etwa 121cm am geringsten. Die durchschnittliche Füllhöhe beträgt etwa 144cm und liegt damit unter der Sollfüllhöhe. Die mittlere Abweichung von der Sollfüllhöhe beträgt etwa 10cm.



## 3.3.4. Gleichrichtwert und Effektivwert einer Wechselspannung




Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Mischspannung (siehe Diagramm) mit Periodendauer 3ms.

a) Wie lautet die Funktionsdar–stellung der Mischspannung?

b) Wie groß ist der Gleichrichtwert allgemein sowie für p=2V und n=1V?

c) Wie groß ist der Effektivwert allgemein sowie für p=2V und n=1V?

In allen Abbildungen ist u(t) mit p=2 und n=1 dargestellt.

Lösung:

a) Die gesuchte Funktion ist periodisch mit Periode 3. Es genügt, nur eine Periode der Funktion darzustellen.

Nachdem das geneigte Stück den Anstieg

$$\frac{p-(-n)}{2-0}=\frac{p+n}{2}$$

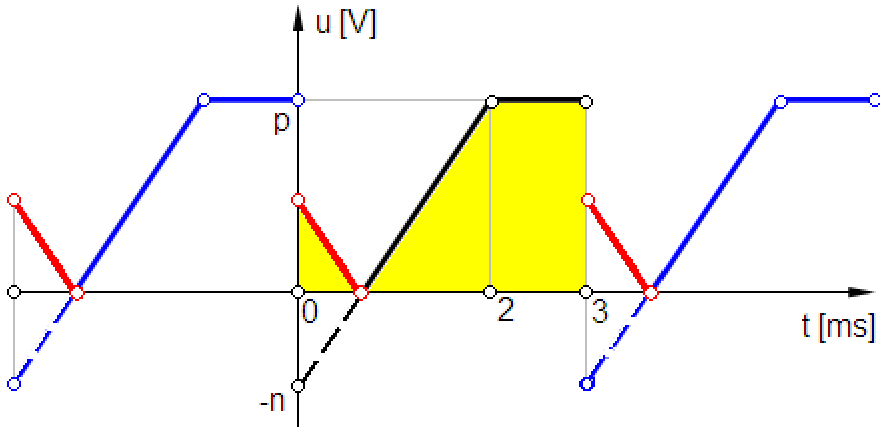
und den Ordinatenabstand –n hat, lautet die Funktionsdarstellung innerhalb der Periode [0;3]

$$u(t)=\left|\begin{array}{ll}\frac{p+n}{2}\cdot t-n & wenn\ 0\le t\le 2\\ p & wenn\ 2\le t\le 3\end{array}\right.$$

b) Der Gleichrichtwert ist der auf die Periodendauer T bezogene Betragsmittelwert einer periodischen Funktion. Die Formel lautet

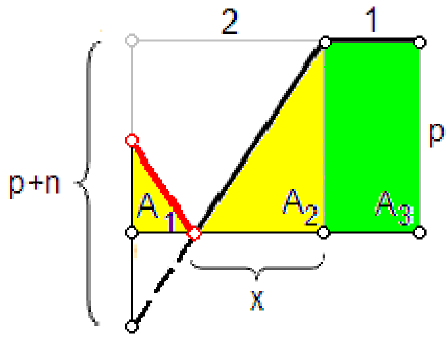
$$m_{|\,|}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T |u(t)|dt$$

Das folgende Diagramm zeigt die Funktionen u(t), $|u(t)|$ sowie die von $|u(t)|$, t=0, t=3 und der t–Achse eingeschlossene Fläche.




Nachdem es sich bei den Flächenstücken nur um zwei Dreiecke und ein Rechteck handelt, erfolgt die Berechnung des Gleichrichtwerts elementar.

Aufgrund des Strahlensatzes gilt




$$x:2 = p:(p+n) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot p}{p+n} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{p^2}{p+n}$$

$$(2-x):2 = n:(p+n) \quad \Rightarrow \quad 2-x = \frac{2 \cdot n}{p+n} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{n^2}{p+n}$$

und damit erhält man

$$m_g = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{n^2}{p+n} + \frac{p^2}{p+n} + 1 \cdot p \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{n^2 + p^2 + p^2 + p \cdot n}{p+n} \right) = \frac{n^2 + 2 \cdot p^2 + p \cdot n}{3 \cdot (p+n)}$$

Für p=2V und n=1V ergibt sich damit

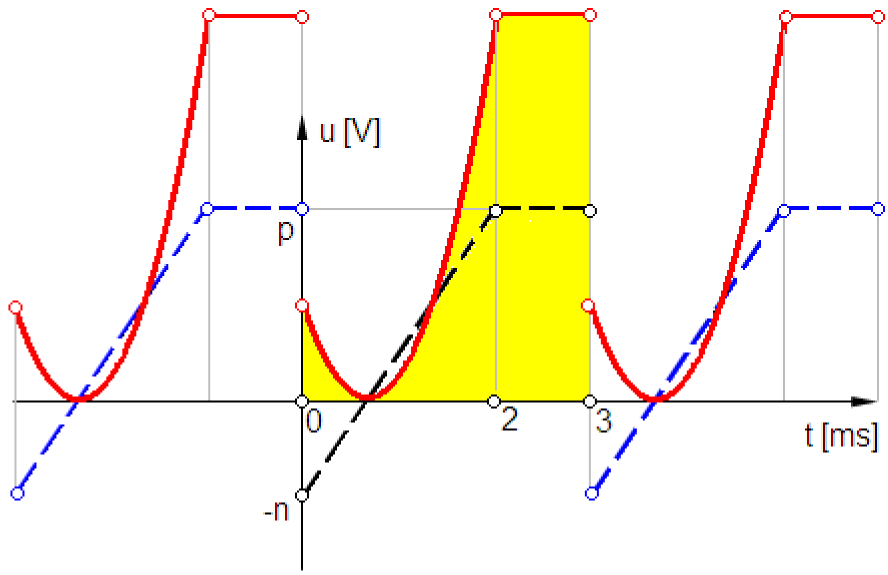
$$m_g = \frac{1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1}{3 \cdot (2+1)} V = \frac{11}{9} V \approx 1.22\, V$$

c) Der Effektivwert ist der auf die Periodendauer T bezogene quadratische Mittelwert einer periodischen Funktion.

Die Formel lautet

$$m_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f^2(t)dt}$$

Das Diagramm zeigt die Funktionen u(t) strichpunktiert, $u^2(t)$ in roter Volllinie sowie die von $u^2(t)$, t=0, t=3 und der t–Achse eingeschlossene Fläche.




Die Berechnung des Gleichrichtwerts erfolgt durch Integration:

$$m_{eff} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left( \int_0^2 \left( \frac{p+n}{2} \cdot t - n \right) dt + \int_2^3 p^2 \; dt \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left( \int_0^2 \left( \frac{p+n}{2} \right)^2 \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{p+n}{2} \cdot t \cdot n + n^2 \; dt + \int_2^3 p^2 \; dt \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left( \left[ \left( \frac{p+n}{2} \right)^2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{p+n}{2} \cdot t^2 \cdot n + n^2 \cdot t \right]_0^2 + \left[ p^2 \cdot t \right]_2^3 \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left( \left[ \left( \frac{p+n}{2} \right)^2 \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{p+n}{2} \cdot 2^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 \right] + p^2 \right)} =$$

$$=\sqrt{\frac{2\cdot p^2+4\cdot p\cdot n+2\cdot n^2-6\cdot p\cdot n-6\cdot n^2+6\cdot n^2+3\cdot p^2}{9}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5\cdot p^2-2\cdot p\cdot n+2\cdot n^2}$$

Für p=2V und n=1V ergibt sich damit

$$m_{eff}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5\cdot 2^2-2\cdot 2\cdot 1+2\cdot 1^2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2}$$

<u>Antwort:</u>

Die Funktion wird innerhalb [0;3] durch

$$u(t)=\left|\begin{array}{rl}\frac{p+n}{2}\cdot t-n & wenn\ 0\le t\le 2\\ p & wenn\ 2\le t\le 3\end{array}\right.$$

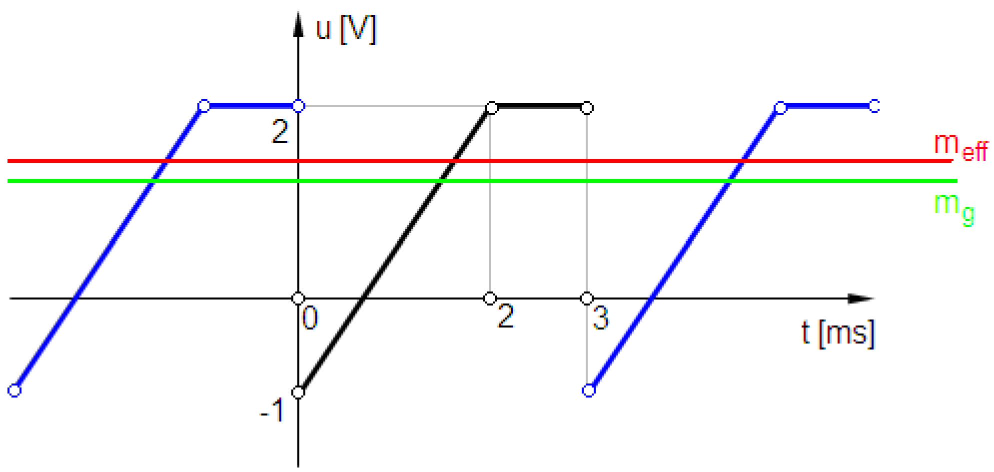
beschrieben.

Gleichrichtwert und Effektivwert sind durch

$$m_g=\frac{n^2+2\cdot p^2+p\cdot n}{3\cdot(p+n)} \qquad m_{eff}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5\cdot p^2-2\cdot p\cdot n+2\cdot n^2}$$

festgelegt.

Für p=2V und n=1V ergibt sich $m_g \approx 1.22V$ und $m_{eff} \approx 1.41V$



## 3.4. Volumen

Die Berechnung des Volumens mithilfe der Integralrechnung gehört zu den Standardaufgaben der Schulmathematik. Zumindest das Volumen von Drehkörpern hat jeder Maturant im Unterricht per Integral berechnet.

Interessant ist für mich daher nicht nur die Berechnung von Drehkörpern, sondern vor allem die Berechnung des Volumens durch Summation von Volumselementen, da sich hier der wieder der Übergang vom diskreten zum stetigen Modell zeigt.

Kurz zu den Beispielen:

- In der ersten Aufgabe erfolgt im Prinzip die Herleitung der Ellipsenfläche und des Ellipsoidvolumens. Daraus wird dann auf das Kugelvolumen geschlossen. Obwohl die Rechnung sehr intensiv ist und im Schulunterricht etwa durch Vorgabe von Formeln abgekürzt werden müsste, gefällt mir, wie sich am Ende einfache Lösungsformeln ergeben.
- In der zweiten Aufgabe tritt eine Integralgleichung als Teil eines Gleichungssystems auf, durch welches eine Polynomfunktion bestimmt werden soll. Was am Anfang so einfach klingt führt zu einem nichtlinearen Gleichungssystem. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein typisches Einsatzgebiet für ein CAS.
- Die dritte Aufgabe führt in mehrfacher Hinsicht in die Geometrie. Einerseits ist das Thema Schiebfläche in der Darstellenden Geometrie und im Bauwesen angesiedelt, andererseits gelingt die Volumsbestimmung entweder durch Integration oder mithilfe des Cavalieri–Prinzips und eines Satzes von Archimedes.
- In der vierten Aufgabe habe ich erkannt, dass das Volumen eines Torus doch mit Schulkenntnissen berechenbar ist. Schön ist, dass sich sowohl durch Rotation als auch mithilfe der Guldin’schen Regel dieselbe Volumsformel ergibt, die allerdings nicht auf eine Kugel spezialisiert werden kann.

### 3.4.1. Rauminhalt einer Obstschale

Aufgabenstellung:

Die Innenform einer Obstschale hat näherungsweise die Form eines halben drei–achsigen Ellipsoids.

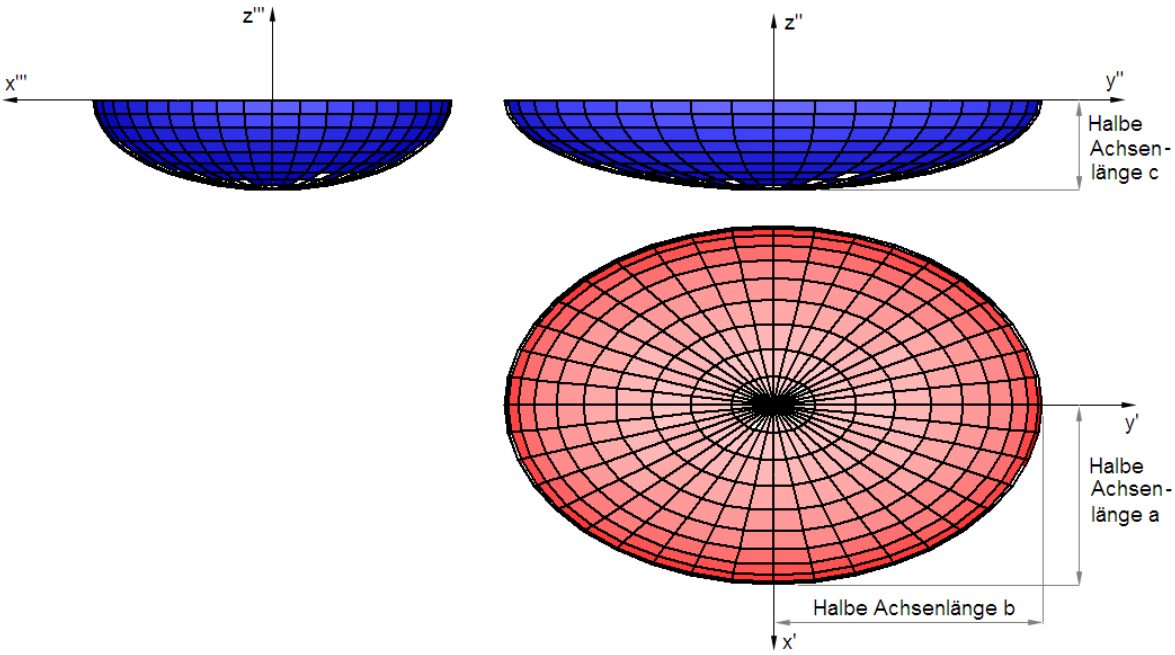
a) Bestimme eine Formel für den Rauminhalt eines dreiachsigen Ellipsoids.

b) Für welchen geometrischen Körper kann daraus die Formel für den Rauminhalt abgeleitet werden?

c) Die Schale wird mit Apfelmus gefüllt. Wie viel Apfelmus passt in die Schale, wenn sie bis zum Rand gefüllt wird?

d) Wie groß ist die Füllhöhe wenn sich ein Liter Apfelmus in der Schale befindet?

Verwende zur Lösung die Angabewerte a=10cm, b=15cm, c=5cm.



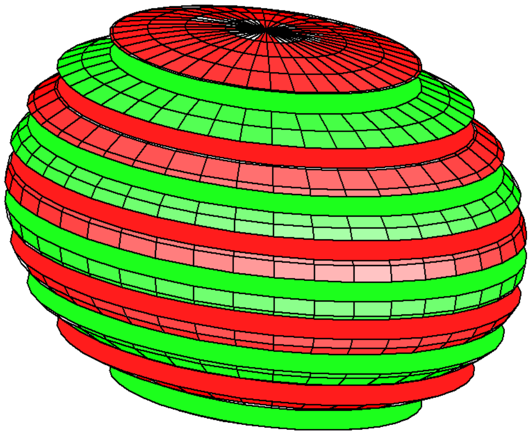

Lösung:

a) Dreiachsige Drehellipsoide werden durch die Formel

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

mit Konstanten a, b und c (= halbe Achsenlängen) beschrieben.

Wir betrachten nun waagrechte und im Abstand z zur xy–Ebene parallel liegende Scheiben. Diese haben die Form von Ellipsen mit der Gleichung



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \quad \Rightarrow$$
$$y(x)=\frac{b}{a\cdot c}\cdot\sqrt{a^2\cdot c^2-c^2\cdot x^2-a^2\cdot z^2}$$

wobei man sich in dieser Formel z als konstante Zahl vorstellt. Diese Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2\cdot\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\cdot\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{a\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}\right)^2}=1$$

haben die von z abhängigen halben Haupt- und Nebenachsenlängen

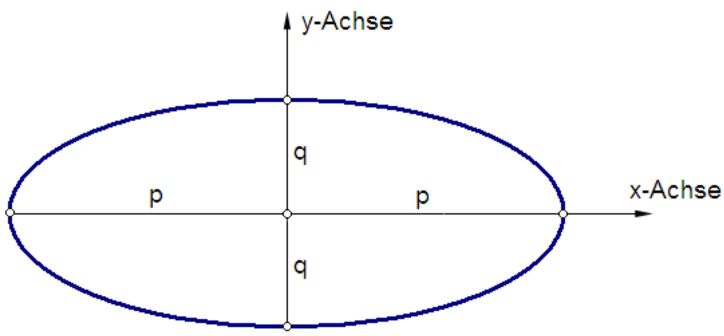
$$\frac{a\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c} \qquad \text{und} \qquad \frac{b\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}$$

Der Flächeninhalt einer solchen Scheibe lautet allgemein

$$A(z)=4\cdot\int_0^{\frac{a}{c}\cdot\sqrt{c^2-z^2}} y(x)\,dx=\frac{4\cdot b}{a\cdot c}\cdot\int_0^{\frac{a}{c}\cdot\sqrt{c^2-z^2}}\sqrt{a^2\cdot c^2-c^2\cdot x^2-a^2\cdot z^2}\,dx$$

Die Berechnung des Flächeninhalts einer Ellipse erfolgt in einer Neben–rechnung.

Um diese möglichst einfach zu halten, berechnet man zuerst den Flächeninhalt der Ellipse




$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1 \quad \Rightarrow \quad y(x)=\frac{q}{p}\cdot\sqrt{p^2-x^2}$$

mit halben Achsenlängen p und q; dazu ist zu berechnen:

$$A_{Ellipse} = 4 \cdot \int_0^p y(x)\,dx = \frac{4 \cdot q}{p} \cdot \int_0^p \sqrt{p^2 - x^2}\;dx$$

Die Substitution

$$x = p \cdot \sin(u), \quad dx = p \cdot \cos(u) \cdot du$$

liefert unter Berücksichtigung der neuen Grenzen

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, \qquad x = p \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\pi}{2}$$

das Integral

$$A_{Ellipse} = \frac{4 \cdot q}{p} \cdot \int_0^p \sqrt{p^2 - x^2}\;dx = \frac{4 \cdot q}{p} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{p^2 - (p \cdot \sin(u))^2}\;\cdot p \cdot \cos(u)\;du =$$

$$= 4 \cdot p \cdot q \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin(u)^2}\;\cdot \cos(u) \cdot du = 4 \cdot p \cdot q \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\,du$$

Das entstehende Integral wird durch partielle Integration wieder in einer Nebenrechnung gelöst.

$$\int \cos(u)^2\,du = \sin(u) \cdot \cos(u) + \int \sin(u)^2\,du = \sin(u) \cdot \cos(u) + \int 1 - \cos(u)^2\,du =$$

$$= \sin(u) \cdot \cos(u) + u - \int \cos(u)^2\,du + 2 \cdot C$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \int \cos(u)^2\,du = \sin(u) \cdot \cos(u) + u + 2 \cdot C \quad \Rightarrow \quad \int \cos(u)^2\,du = \frac{\sin(u) \cdot \cos(u) + u}{2} + C$$

Damit ergibt sich

$$A_{Ellipse} = 4 \cdot p \cdot q \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\,du = 4 \cdot p \cdot q \cdot \left.\frac{\sin(u) \cdot \cos(u) + u}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot p \cdot q \cdot \frac{\pi}{2} = p \cdot q \cdot \pi$$

Daher lautet die Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse mit halben Achsenlängen p und q einfach A=p·q·π. Ist die Formel bekannt, dann wird auf die Herleitung verzichtet.

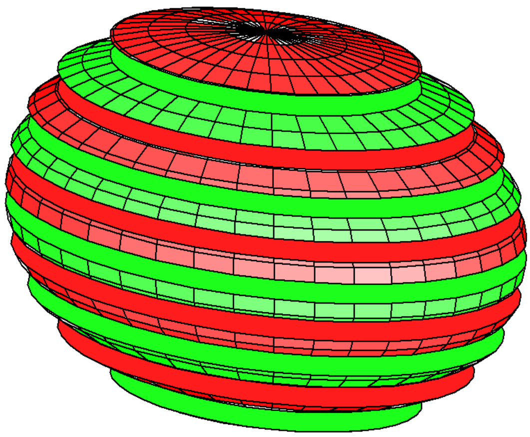
Im konkreten Beispiel ergibt sich unter Verwendung der halben Achsenlängen

$$\frac{a\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c} \qquad \text{und} \qquad \frac{b\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}$$

der Flächeninhalt

$$A(z)=\frac{a\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}\cdot\frac{b\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}\cdot\pi=\frac{a\cdot b\cdot\left(c^2-z^2\right)}{c^2}\cdot\pi$$

Wir summieren „Ellipsenscheibchen“ mit Volumen A(z)·Δz zwischen z=–c und z=c.



Der Grenzübergang Δz→0 liefert aufgrund der Symmetrie des Objekts das Integral

$$V=2\cdot\int_0^c A(z)dz=2\cdot\int_0^c\frac{a\cdot b\cdot\left(c^2-z^2\right)}{c^2}\cdot\pi\,dx=$$

$$=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot\pi}{c^2}\cdot\int_0^c c^2-z^2\,dz=$$

$$=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot\pi}{c^2}\cdot\left[c^2\cdot z-\frac{z^3}{3}\right]_0^c=$$

$$=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot\pi}{c^2}\cdot\left[c^3-\frac{c^3}{3}\right]=\frac{4\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\pi}{3}$$

b) Für a=b=c=r wird das Ellipsoid zur Kugel; damit erhält man das Kugelvolumen als

$$V_{Kugel}=\frac{4\cdot r^3\cdot\pi}{3}.$$

c) Betragen die Abmessungen der Schale a=10cm, b=15cm und c=5cm, dann hat die Schale (=untere Hälfte des Ellipsoids) den Rauminhalt

$$V_{Schale} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \pi}{3} cm^3 \approx 1571 cm^3 = 1.571 dm^3 = 1.571 l$$

d) Um die Frage nach der Füllhöhe H zu beantworten, berechnet man das Volumen durch Addition waagrecht liegender Scheiben zwischen den Grenzen z=–c und z=–c+H. Die Rechnung erfolgt analog zu a) und liefert

$$\begin{aligned}
1000 &= \int_{-c}^{-c+H} A(z)dz = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \int_{-c}^{-c+H} c^2 - z^2 dz = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left[ c^2 \cdot z - \frac{z^3}{3} \right]_{-c}^{-c+H} = \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left[ c^2 \cdot (-c+H) - \frac{(-c+H)^3}{3} - \left( -c^3 + \frac{c^3}{3} \right) \right] = \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left[ -c^3 + c^2 \cdot H - \frac{(-c+H)^3}{3} + c^3 - \frac{c^3}{3} \right] = \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{3 \cdot c^2} \cdot \left( 3 \cdot c^2 \cdot H - (-c+H)^3 - c^3 \right) = \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{3 \cdot c^2} \cdot \left( 3 \cdot c^2 \cdot H - H^3 + 3 \cdot H^2 \cdot c - 3 \cdot H \cdot c^2 + c^3 - c^3 \right) = \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{3 \cdot c^2} \cdot \left( -H^3 + 3 \cdot H^2 \cdot c \right) = \frac{a \cdot b \cdot H^2 \cdot \pi}{3 \cdot c^2} \cdot (3 \cdot c - H)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$1000 = \frac{a \cdot b \cdot H^2 \cdot \pi}{3 \cdot c^2} \cdot (3 \cdot c - H) \quad \Rightarrow \quad H^3 - 3 \cdot c \cdot H^2 + \frac{3000 \cdot c^2}{a \cdot b \cdot \pi} = 0$$

Nachdem diese Gleichung dritten Grades zumindest eine reelle Lösung besitzt (und mit der Formel von Cardano gelöst werden kann) ist die Aufgabe nun prinzipiell gelöst.

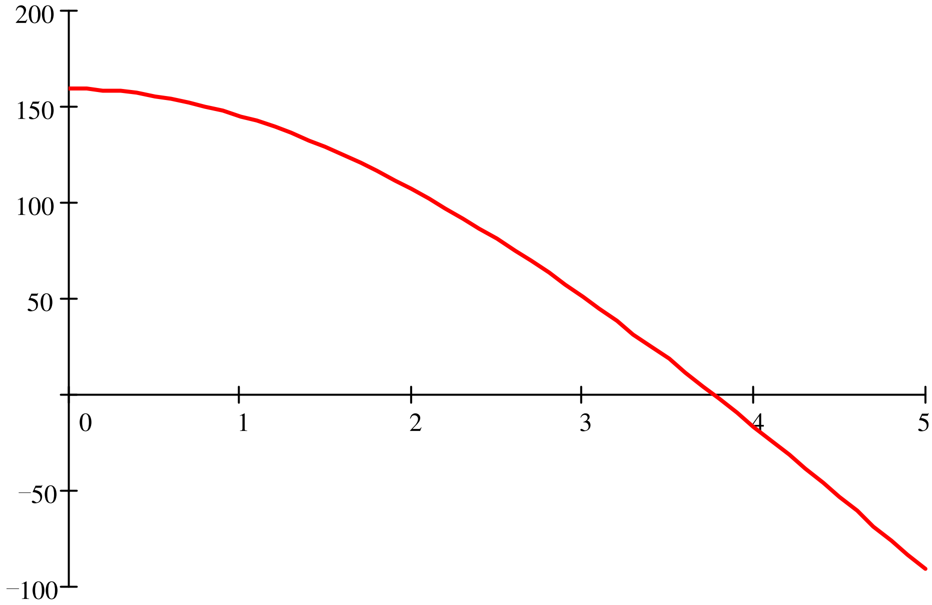
Für die konkreten Angabewerte a=10cm, b=15cm und c=5cm ergibt sich die Gleichung

$$H^3 - 3 \cdot 5 \cdot H^2 + \frac{3000 \cdot 5^2}{10 \cdot 15 \cdot \pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad H^3 - 15 \cdot H^2 + \frac{500}{\pi} = 0,$$

welche näherungsweise mithilfe des CAS MathCad gelöst wird.

$$H := 0, 0.1 .. 5$$

$$n(H) := H^3 - 15 \cdot H^2 + \frac{500}{\pi}$$




$H = 3$ $\qquad\qquad$ $wurzel(n(H), H) = 3.764$

Es ergibt sich die Füllhöhe H=3.764cm.

<u>Antwort:</u>

Die Formel für den Rauminhalt eines Ellipsoids mit halben Achsenlängen a, b und c lautet

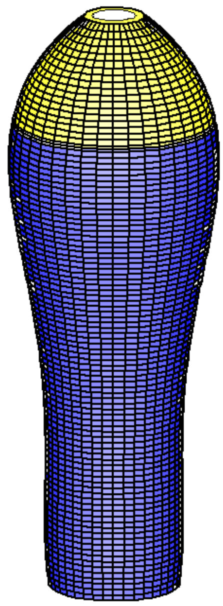
$$V = \frac{4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi}{3}.$$

Für a=b=c=r ergibt sich die Formel für das Kugelvolumen

$$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}.$$

In die halbe Schale passen etwa 1.6 Liter Apfelmus. Wird die Schale mit 1 Liter Apfelmus gefüllt, dann beträgt der Füllstand etwa 3.8cm.

## 3.4.2. Dimensionierung einer Getränkeflasche



Aufgabenstellung:

Eine Getränkeflasche entsteht näherungsweise durch Rotation einer Polynomfunktion 4.Grades um die x–Achse.

a) Wie lautet die Polynomfunktion, wenn eine bis zur Füllhöhe 22cm gefüllte Flasche insgesamt 1l Flüssigkeit enthält?

b) Wie hoch ist der Füllstand wenn die Flasche zur Hälfte ausgetrunken wurde?

Die Abbildung rechts zeigt die stehende, mit 1l Flüssigkeit gefüllte Flasche. Verwende zur Lösung die Angabewerte aus der unten stehenden Skizze.


Lösung:

a) Die Polynomfunktion lautet allgemein

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e, \quad x \in [0;27]$$

Aus der Angabe ergibt sich folgendes (aufgrund der fünften Zeile) nichtlineares Gleichungssystem in 5 Unbekannten:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 3 && \Rightarrow \quad e = 3 \\
&f(27) = 1.5 && \Rightarrow \quad a \cdot 27^4 + b \cdot 27^3 + c \cdot 27^2 + d \cdot 27 + e = 1.5 \\
&f'(3) = 0 && \Rightarrow \quad 4 \cdot a \cdot 3^3 + 3 \cdot b \cdot 3^2 + 2 \cdot c \cdot 3 + d = 0 \\
&f'(6) = 0 && \Rightarrow \quad 4 \cdot a \cdot 6^3 + 3 \cdot b \cdot 6^2 + 2 \cdot c \cdot 6 + d = 0 \\
&\pi \cdot \int_0^{22} f^2(x)\, dx = 1000 && \Rightarrow \quad \int_0^{22} \left(a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e\right)^2 dx = \frac{1000}{\pi}
\end{aligned}$$

Dieses wird zuerst vereinfacht

$$-1 = 354294 \cdot a + 13122 \cdot b + 486 \cdot c + 18 \cdot d$$
$$0 = 108 \cdot a + 27 \cdot b + 6 \cdot c + d$$
$$0 = 864 \cdot a + 108 \cdot b + 12 \cdot c + d$$

$$\frac{1000}{\pi} = \frac{1207269217792}{9} \cdot a^2 + 13718968384 \cdot a \cdot b + \frac{4988715776}{7} \cdot a \cdot c + \frac{2494357888}{7} \cdot b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{113379904}{3} \cdot a \cdot d + \frac{113379904}{3} \cdot b \cdot c + \frac{30921792}{5} \cdot a + \frac{10307264}{5} \cdot b \cdot d + \ldots$$
$$\ldots + \frac{5153632}{5} \cdot c^2 + 351384 \cdot b + 117128 \cdot c \cdot d + 21296 \cdot c + \frac{10648}{3} \cdot d^2 + 1452 \cdot d + 198$$

und danach mit Hilfe des CAS MathCad gelöst:

$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad d := 1$

vorgabe

$$-1 = 354294 \cdot a + 13122 \cdot b + 486 \cdot c + 18 \cdot d$$

$$0 = 108 \cdot a + 27 \cdot b + 6 \cdot c + d$$

$$0 = 864 \cdot a + 108 \cdot b + 12 \cdot c + d$$

$$\frac{1000}{\pi} = \frac{1207269217792}{9} \cdot a^2 + 13718968384 \cdot b \cdot a + \frac{4988715776}{7} \cdot c \cdot a + \frac{2494357888}{7} \cdot b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{113379904}{3} \cdot d \cdot a + \frac{113379904}{3} \cdot c \cdot b + \frac{30921792}{5} \cdot a + \frac{10307264}{5} \cdot d \cdot b + \frac{5153632}{5} \cdot c^2 +$$

$$+ 351384 \cdot b + 117128 \cdot d \cdot c + 21296 \cdot c + \frac{10648}{3} \cdot d^2 + 1452 \cdot d + 198$$

$$\text{suchen}(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} -0.0000891778 \\ 0.0034746361 \\ -0.0356711861 \\ 0.1298431431 \end{bmatrix}$$

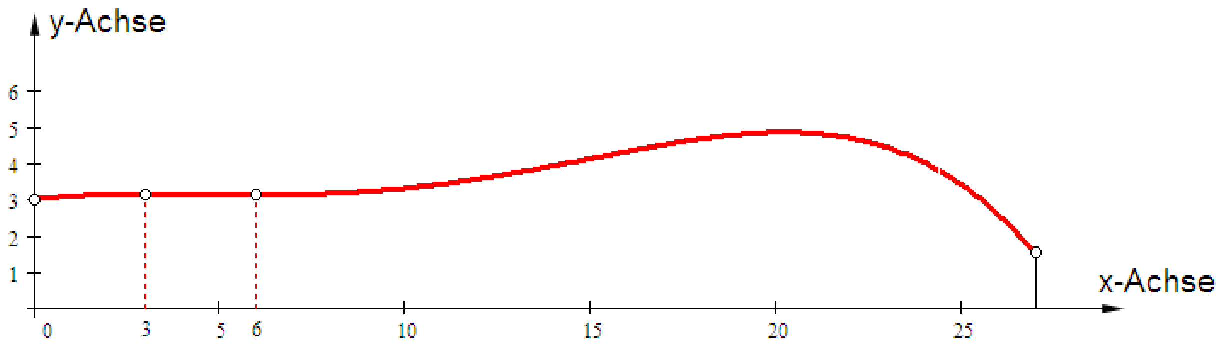
Daher lautet die gesuchte Funktion

$$f(x) = -0.0000891778 \cdot x^4 + 0.0034746361 \cdot x^3 - 0.0356711861 \cdot x^2 + 0.1298431431 \cdot x + 3,$$

welche durch Rundung auf

$$f(x) = -0.0000892 \cdot x^4 + 0.00347 \cdot x^3 - 0.0357 \cdot x^2 + 0.130 \cdot x + 3$$

vereinfacht wird. Das Diagramm zeigt die Lösungsfunktion.




Wie die Kontrolle

$$\pi \cdot \int_0^{22} f(x)^2 \, dx = 989.9543785561$$

zeigen, ist die Rundung mit etwa 1%-Abweichung von der Füllmenge durchaus zufriedenstellend.

b) Ist die Flasche zur Hälfte ausgetrunken, dann beträgt der Inhalt 0.5 Liter=500cm$^3$. Die gesuchte Füllhöhe H ergibt sich als Lösung der Gleichung

$$\pi \cdot \int_0^H \left(-0.0000892 \cdot x^4 + 0.00347 \cdot x^3 - 0.0357 \cdot x^2 + 0.130 \cdot x + 3\right)^2 \, dx = 500$$

Nach Integration ergibt sich die Gleichung

$$8.84071 \cdot 10^{-10} \cdot H^9 - 7.7381 \cdot 10^{-8} \cdot H^8 + 2.62997 \cdot 10^{-6} \cdot H^7 - 4.51583 \cdot 10^{-5} \cdot H^6 + \ldots$$
$$\ldots + 3.28298 \cdot 10^{-4} \cdot H^5 + 2.8845 \cdot 10^{-3} \cdot H^4 - 6.5767 \cdot 10^{-2} \cdot H^3 + 0.39 \cdot H^2 + 9 \cdot H - \frac{500}{\pi} = 0$$

welche im Bereich $D_H$=[0;27] mittels des CAS MathCad gelöst wird:

Die in $D_H$ liegende Nullstelle der Funktion

$$n(H) = 8.84071 \cdot 10^{-10} \cdot H^9 - 7.7381 \cdot 10^{-8} \cdot H^8 + 2.62997 \cdot 10^{-6} \cdot H^7 - 4.51583 \cdot 10^{-5} \cdot H^6 + \ldots$$
$$\ldots + 3.28298 \cdot 10^{-4} \cdot H^5 + 2.8845 \cdot 10^{-3} \cdot H^4 - 6.5767 \cdot 10^{-2} \cdot H^3 + 0.39 \cdot H^2 + 9 \cdot H - \frac{500}{\pi}$$

ergibt sich nach Wahl eines Startwerts

$$H := 20 \qquad wurzel(n(H), n) = 14.541$$

Zur Probe wird wiederum die Füllmenge berechnet:

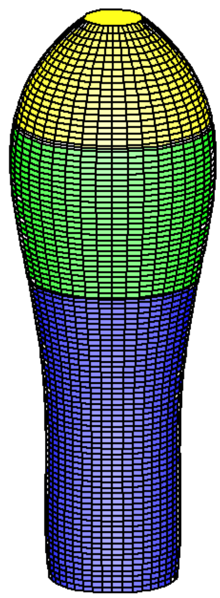
$$\pi \cdot \int_0^{14.541} f(x)^2 \, dx = 500.022$$

Wie sich zeigt, genügt für die Füllhöhe der Näherungswert 14.5cm, da bei

$$\pi \cdot \int_0^{14.5} f(x)^2 \, dx = 497.942$$

die Abweichung vom Sollwert 500cm$^3$ wieder unter 1% liegt.

<u>Antwort:</u>



Die Gleichung der Polynomfunktion lautet

$$f(x) = -0.0000892 \cdot x^4 + 0.00347 \cdot x^3 - 0.0357 \cdot x^2 + 0.130 \cdot x + 3$$

Ist die Flasche nur noch halb gefüllt (500cm$^3$), dann beträgt die Füllhöhe 14.5cm. In der rechten Abbildung fassen die blauen sowie grünen Volumina jeweils 500cm$^3$.

### 3.4.3. Rauminhalt einer Sporthalle

Aufgabenstellung:

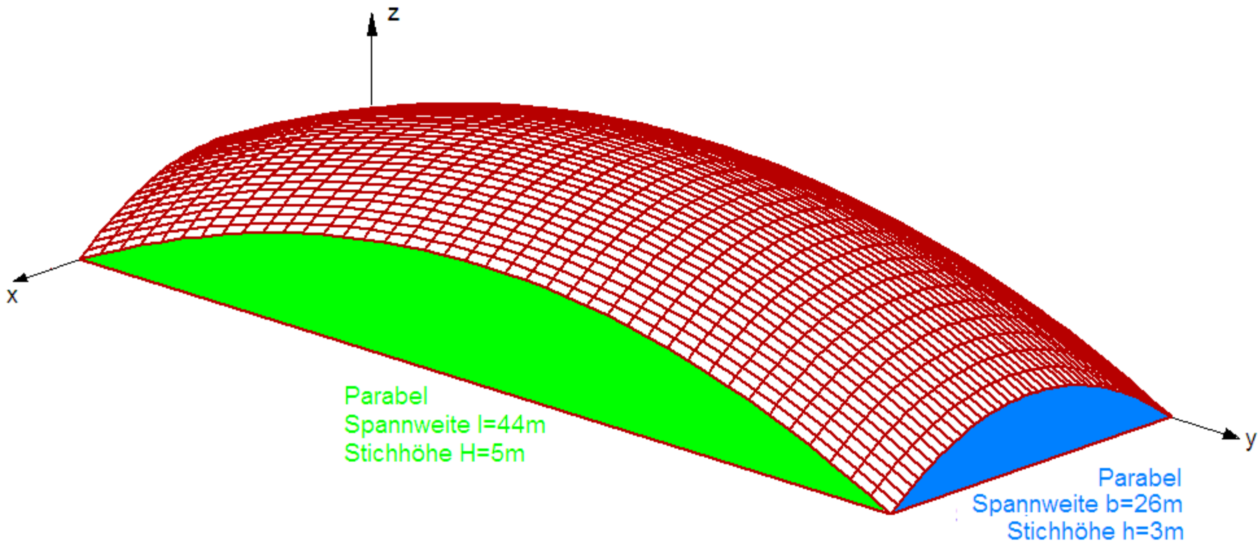
Die Überdachung einer Sporthalle hat die Form einer Schiebfläche.

a) Berechne das Volumen der Halle mithilfe des Cavalieri–Prinzips.

b) Berechne das Volumen der Halle durch Integration.

c) Wie viel Luft passt in die Halle, wenn die Halle innen 44m lang, 26m breit und 8m hoch ist?

Verwende zur Rechnung die Angaben aus der Skizze!

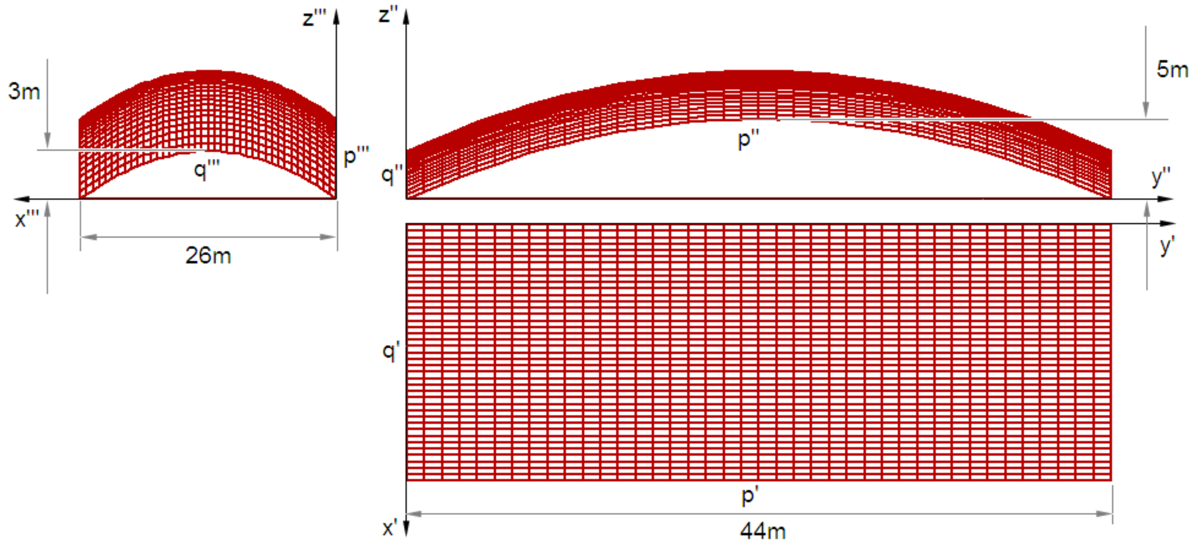



Hinweis:

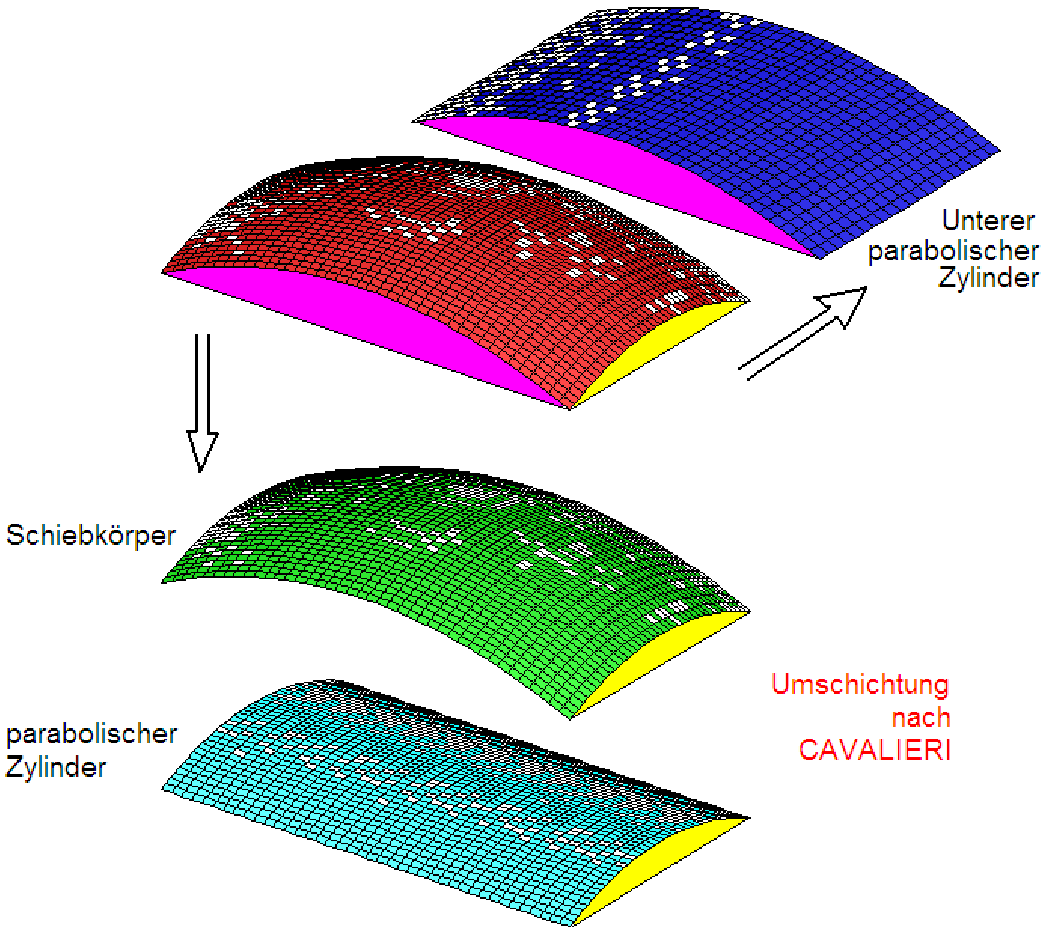
Eine Schiebfläche entsteht, indem man eine Kurve p längs einer anderen Kurve q verschiebt, wobei p und q nicht parallel sein dürfen.

Lösung:

a) Das Koordinatensystem wird wie in der folgenden Skizze gewählt:



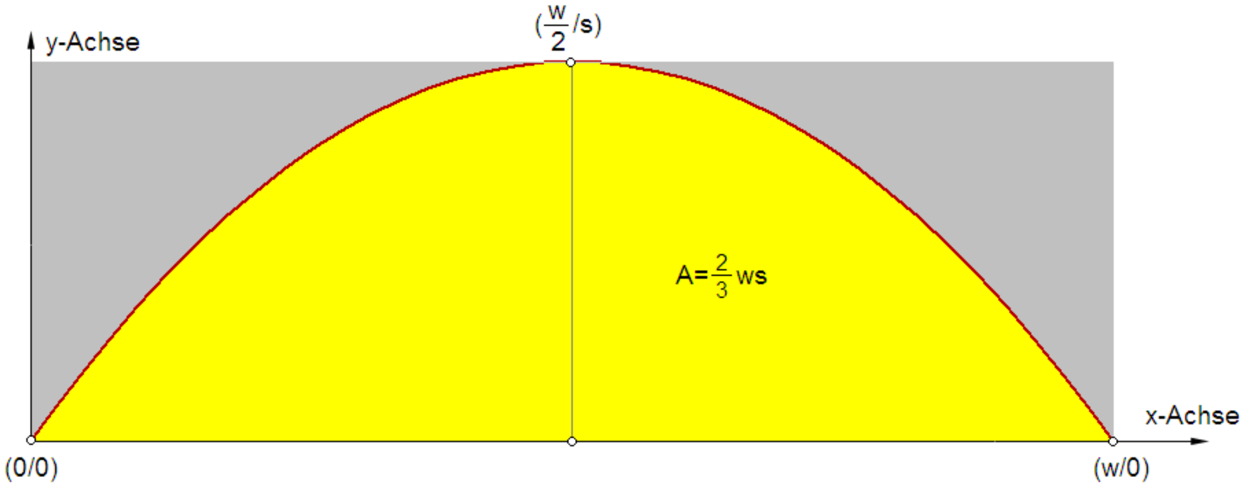

Wir „zersägen“ die Halle parallel zur x–Achse und entlang der Parabel p in zwei Teile. Zur Verdeutlichung werden die verschiedenen Teile in der folgenden Abbildung aus– einandergeschoben.



Nach dem Cavalieri–Prinzip ist das Volumen $V_{oben}$ des oberen Teils gleich dem Volumen eines parabolischen Zylinders. Die Grundfläche wird von der Parabel q und der x–Achse begrenzt, die „Höhe" beträgt l.

Der untere Teil ist bereits ein parabolischer Zylinder. Die Grundfläche wird von der Parabel p und der y–Achse begrenzt, die „Höhe" beträgt b. Sein Volumen sei $V_{unten}$.

Die Formel für die Fläche des Parabelsegments bestimmen wir durch Integration:




Wir kennen von der Parabel Spannweite w und Stichhöhe s und setzen allgemein

$$y(x) = \mu \cdot x \cdot (x - w)$$

Unter Berücksichtigung der Stichhöhe, d.h. des Parabelpunktes

$$\left( \frac{w}{2} \middle/ s \right)$$

ergibt sich mit

$$s = \mu \cdot \frac{w}{2} \cdot \left( \frac{w}{2} - w \right) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{-4 \cdot s}{w^2}$$

die Darstellung

$$y(x) = \frac{-4 \cdot s \cdot x \cdot (x - w)}{w^2}$$

Die von Parabel und x-Achse eingeschlossene Fläche berechnet man durch

$$A=\int_0^w y(x)\,dx=\frac{-4\cdot s}{w^2}\cdot\int_0^w x\cdot(x-w)\,dx=\frac{-4\cdot s}{w^2}\cdot\int_0^w x^2-w\cdot x\,dx=$$
$$=\frac{-4\cdot s}{w^2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{w\cdot x^2}{2}\right)_0^w=\frac{-4\cdot s}{w^2}\cdot\left(\frac{w^3}{3}-\frac{w^3}{2}\right)=\frac{2\cdot s\cdot w}{3}$$

Das Parabelsegment ist also 2/3 so groß als das von Stichhöhe und Spannweite gebildeten Rechteck. Dieser Sachverhalt ist als der „Satz von Archimedes“ bekannt.

Damit ergeben sich die Volumina

$$V_{oben}=\frac{2\cdot h\cdot b}{3}\cdot l \qquad\qquad V_{unten}=\frac{2\cdot H\cdot l}{3}\cdot b$$

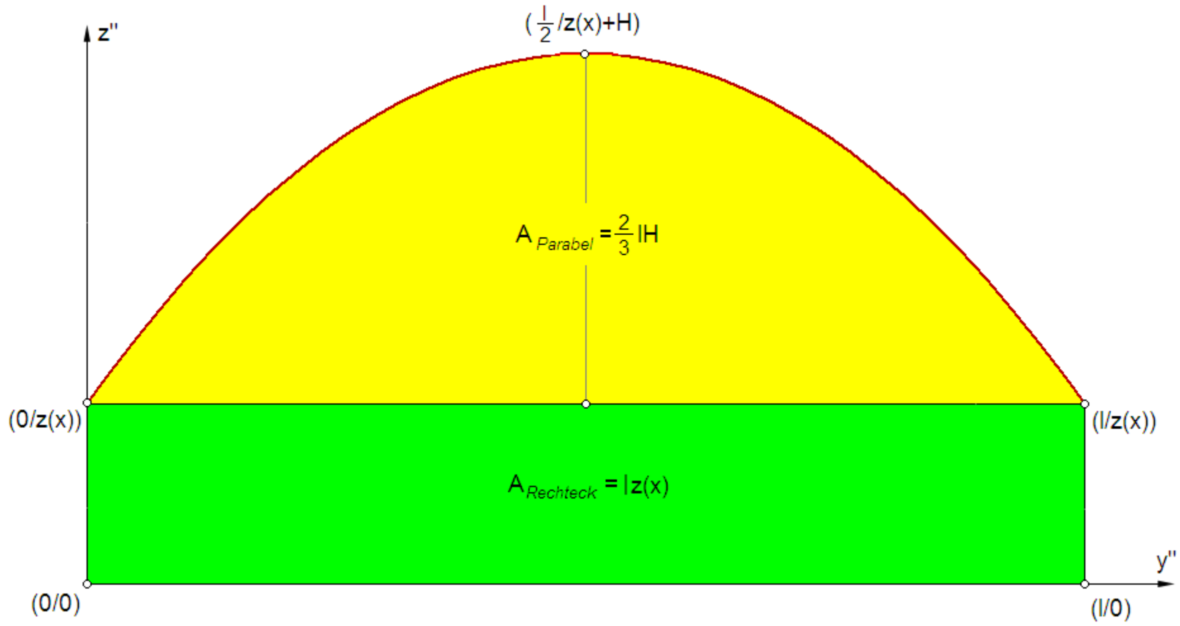
und damit das Gesamtvolumen

$$V=V_{oben}+V_{unten}=\frac{2\cdot h\cdot b}{3}\cdot l+\frac{2\cdot H\cdot l}{3}\cdot b=\frac{2\cdot b\cdot l}{3}\cdot(h+H)$$

b) Zuerst werden die Parabeln p und q festgelegt. Aus a) folgt

$$p:\quad z(y)=\frac{-4\cdot H\cdot y\cdot(y-l)}{l^2} \qquad\qquad q:\quad z(x)=\frac{-4\cdot h\cdot x\cdot(x-b)}{b^2}$$

Wir schneiden das Objekt mit Ebenen parallel zur yz-Ebene:



Dadurch erhält man eine aus einem Parabelsegment und einem Rechteck mit Breite l und Höhe z(x) zusammengesetzte Fläche. Deren Inhalt beträgt

$$A(x) = A_{Parabel} + A_{Rechteck} = \frac{2 \cdot l \cdot H}{3} + l \cdot \frac{-4 \cdot h \cdot x \cdot (x-b)}{b^2}$$

Summiert man die Flächenelemente $A(x) \cdot \Delta x$ für $x \in [0;b]$ und führt danach den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durch, dann ergibt sich das Gesamtvolumen als

$$\begin{aligned} V &= \int_0^b A(x)\,dx = \int_0^b \frac{2 \cdot l \cdot H}{3} + l \cdot \frac{-4 \cdot h \cdot x \cdot (x-b)}{b^2}\,dx = \\ &= \left.\frac{2 \cdot l \cdot H \cdot x}{3}\right|_0^b - \frac{4 \cdot l \cdot h}{b^2} \cdot \int_0^b x \cdot (x-b)\,dx = \frac{2 \cdot l \cdot H \cdot b}{3} - \frac{4 \cdot l \cdot h}{b^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b \cdot x^2}{2}\right]_0^b = \\ &= \frac{2 \cdot l \cdot H \cdot b}{3} - \frac{4 \cdot l \cdot h}{b^2} \cdot \left[\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2}\right] = \frac{2 \cdot l \cdot H \cdot b}{3} + \frac{4 \cdot l \cdot h \cdot b^3}{6 \cdot b^2} = \frac{2 \cdot l \cdot b}{3} \cdot (H+h) \end{aligned}$$

c) Für die konkreten Zahlenwerte l=44m, H=5m, b=26m, h=3m ergibt sich

$$V = \frac{2 \cdot 26 \cdot 44}{3} \cdot (3+5)\,m^3 \approx 6101 m^3 = 6.101 \cdot 10^6\,l$$

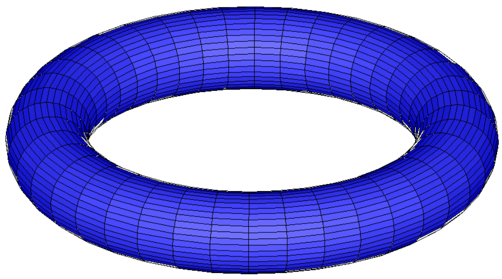
<u>Antwort:</u>

Das Volumen beträgt

$$V = \frac{2 \cdot l \cdot b}{3} \cdot (H+h)$$

In der konkret angegebenen Halle passen etwa $6 \cdot 10^6$ Liter Luft.

## 3.4.4. Aufblasen eines Schwimmreifens



Aufgabenstellung:

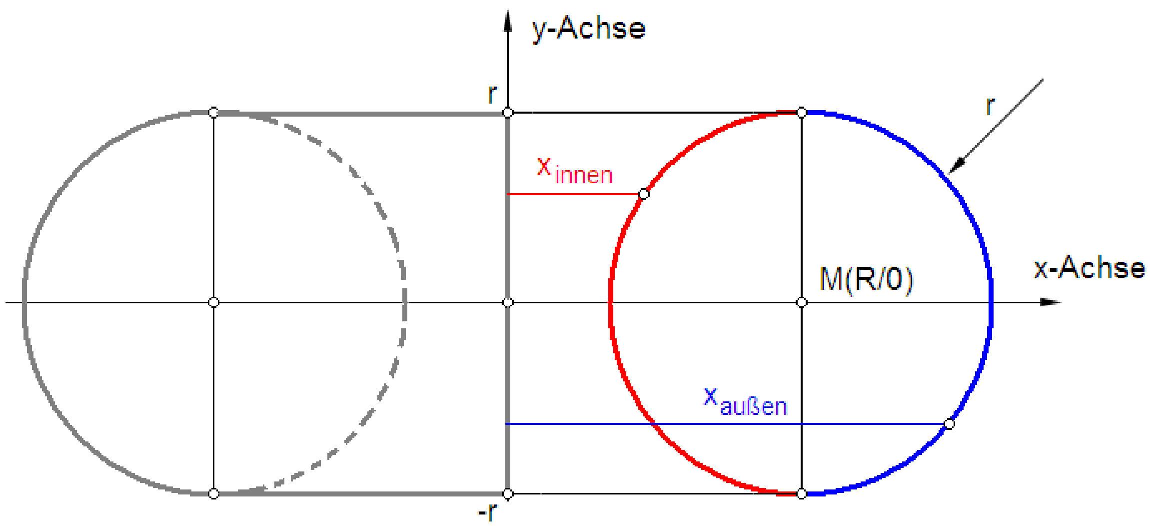
Ein Schwimmreifen hat die Form eines Torus (=Kreisringfläche) mit Meridiankreisradius r=5cm und Mittenkreisradius R=25cm.

a) Wie viel Luft passt in den Schwimmreifen, wenn er voll aufgeblasen wird? Löse diese Frage auf zwei verschiedenen Rechenwegen.

b) Wie lange dauert das Aufblasen, wenn pro Atemzug etwa 0.5 Liter Luft ausgeatmet werden und man in Ruhe etwa 15 Atemzüge pro Minute macht?

Lösung:

a1) Der Torus wird erzeugt, indem die Kreisfläche um die y–Achse rotiert. Die Kreislinie ist dabei durch ihren Mittelpunkt M=(R/0) sowie den Radius r festgelegt. R nennt man Mittenkreisradius, r nennt man Meridiankreisradius.




Die Gleichung des Kreises lautet

$$(x-R)^2 + y^2 = r^2 .$$

Das Volumen des Drehkörpers wird als Differenz zweier Drehvolumina, nämlich $V = V_{außen} - V_{innen}$ ermittelt.

Aus

$$(x-R)^2 + y^2 = r^2$$

folgt nach Formelumstellungen

$$x = R \pm \sqrt{r^2 - y^2} = x(y)$$

Dabei wird der äußere Halbkreis durch

$$x_{außen}(x) = R + \sqrt{r^2 - y^2}$$

und der innere Halbkreis durch

$$x_{innen}(y) = R - \sqrt{r^2 - y^2}$$

beschrieben. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \left(R + \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 \, dy - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \left(R - \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 \, dy = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \left(R + \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 dy = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r 2 \cdot R \cdot 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy = 8 \cdot \pi \cdot R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy \end{aligned}$$

Die Substitution

$$y = p \cdot \sin(u), \quad dy = p \cdot \cos(u) \cdot du$$

liefert unter Berücksichtigung der neuen Grenzen

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, \qquad y = p \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\pi}{2}$$

das Integral

$$V = 8 \cdot \pi \cdot R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 8 \cdot \pi \cdot R \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) du$$

Das Integral wird durch partielle Integration in einer Nebenrechnung gelöst:

$$\int \cos(u)^2\,du = \sin(u)\cdot\cos(u) + \int \sin(u)^2\,du = \sin(u)\cdot\cos(u) + \int 1-\cos(u)^2\,du =$$
$$= \sin(u)\cdot\cos(u) + u - \int \cos(u)^2\,du + 2\cdot C$$
$$\Rightarrow \quad 2\cdot\int \cos(u)^2\,du = \sin(u)\cdot\cos(u) + u + 2\cdot C \quad \Rightarrow \quad \int \cos(u)^2\,du = \frac{\sin(u)\cdot\cos(u)+u}{2} + C$$

Daher erhalten wir insgesamt

$$V = 8\cdot\pi\cdot R\int_0^r \sqrt{r^2-y^2}\,dy = 8\cdot\pi\cdot R\cdot r^2\left[\frac{\sin(u)\cdot\cos(u)+u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\cdot\pi\cdot R\cdot r^2\cdot\frac{\pi}{4} = 2\cdot\pi^2\cdot r^2\cdot R$$

a2) Nach der Guldin'schen Regel ist das Volumen des Drehkörpers gleich dem Produkt aus der erzeugenden Fläche und der Länge des Schwerpunktwegs:

$$V = r^2\cdot\pi\cdot 2\cdot R\cdot\pi = 2\cdot\pi^2\cdot r^2\cdot R\ .$$

Aus den konkreten Zahlenwerten ergibt sich damit ein Volumen von

$$V = 2\cdot\pi^2\cdot 5^2\cdot 25\ cm^3 \approx 12340\ cm^3 = 12.34\ dm^3 = 12.34\ l$$

b) Zum Einblasen von 12.34 Liter Luft in den Schwimmreifen benötigt man

$$\frac{12.34\ l}{0.5\ l} = 24.68 \approx 25$$

Atemzüge. Das Aufblasen dauert daher

$$\frac{25\ Atemzüge}{15\ Atemzüge/Minute} \approx 1.7\ Minuten\ .$$

<u>Antwort:</u>

Die Formel für den Rauminhalt eines Torus lautet

$$V = 2\cdot\pi^2\cdot r^2\cdot R$$

In den Schwimmreifen passen ca. 12.4 Liter Luft, das Aufblasen dauert ca. 2 Minuten.

## 3.5. Weglänge

Die Bogenlänge einer Kurve ist ein weiteres Kapitel, in welchem das Integral als Summenbildung vermittelt und verstanden werden kann. Leider gibt es im Schulunterricht nur wenige Funktionen, von denen die Bogenlänge durch Integration ermittelt werden kann.

Daher bin ich froh, auch hier ein paar Beispiele anbieten zu können.

Kurz zu den Beispielen:

- In der ersten Aufgabe wird zuerst die Formel für die Bogenlänge hergeleitet und dann in einem konkreten Beispiel mithilfe eines CAS berechnet.
- Die zweite Aufgabe behandelt die Kettenlinie, die in Schulbüchern oft als Ergänzung zur Exponentialfunktion besprochen wird. Nachdem sich die Bogenlänge der Kettenlinie durch Integration problemlos berechnen lässt, stellt dieses Beispiel eine wichtige Anwendung dar. Schön finde ich an dieser Aufgabe auch das Anwenden der Keplerschen Fassregel, welche tatsächlich zu einer mit einfachen Mitteln lösbaren Gleichung führt.
- Auch in der dritten Aufgabe ist die Bogenlänge ohne Einsatz eines CAS berechenbar. Und wie das Beispiel zeigt, legen Tennisbälle ganz andere Wege zurück als Tennisspieler.
- In der vierten Aufgabe steckt die gesuchte Unbekannte in einer Integrations–grenze. Eben weil solche Fragestellungen nicht sehr oft vorkommen, finde ich diese Aufgabe, die erst mithilfe eines CAS gelöst werden kann, sehr reizvoll.

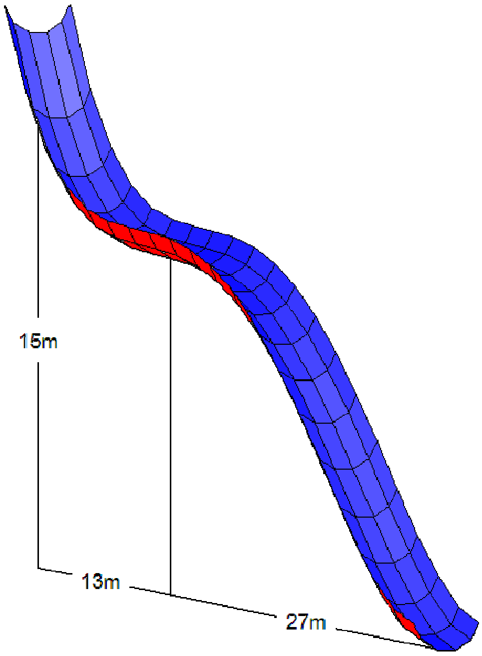
## 3.5.1. Länge einer Wasserrutsche

Aufgabenstellung:

Eine Wasserrutsche wird durch die Polynom–funktion

$$f(x) = 0.00005267 \cdot x^4 - 0.004635 \cdot x^3 + \dots$$
$$\dots + 0.127 \cdot x^2 - 1.424 \cdot x + 15,\ x \in [0;40]$$

beschrieben.




a) Leite eine allgemeine Formel für die Länge eines Kurvenstücks her.

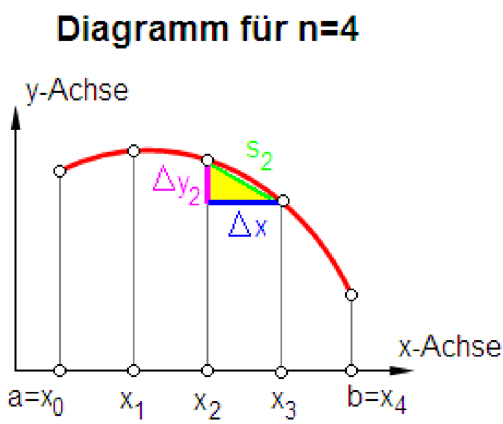
b) Wie lange ist die durch f(x) definierte Rutsche?

Lösung:

a) Für die allgemeine Herleitung betrachtet man ein Kurvenstück f(x) im Definitionsbereich D=[a;b].

Das Intervall wird in n gleichgroße Teile geteilt. Daraus ergeben sich die Teilungspunkte

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n = b.$$




Der Abstand benachbarter Teilungspunkten beträgt

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x, \quad i = 1, 2, \dots n-1.$$

Man betrachtet zuerst ein Teilintervall $[x_i;x_{i+1}]$ und berechnet die Länge der Sehne $s_i$.

$$s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Die Addition aller Sehnenstücke liefert einen Näherungswert für die Kurvenlänge (Bogenlänge) als

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$, d.h. $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x} \rightarrow f'(x_i)$$

und damit

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

womit eine allgemeingültige Formel gefunden ist.

b) Die Berechnung der Bogenlänge mithilfe des CAS MathCad ergibt

$$s = \int_0^{40} \sqrt{1 + \left(0.00021068 \cdot x^3 - 0.013905 \cdot x^2 + 0.254 \cdot x - 1.424\right)^2}\, dx \approx 44.3$$

<u>Antwort:</u>

Die Bogenlänge einer im Intervall D=[a;b] definierten Funktion f(x) beträgt

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \; .$$

Die Länge von

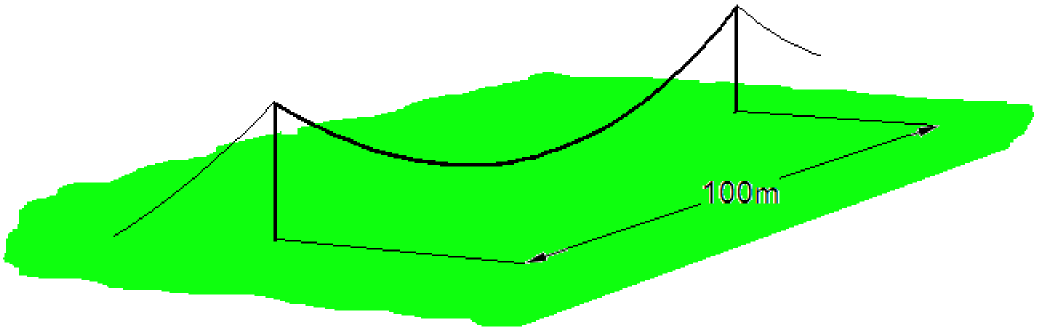
$$f(x) = 0.00005267 \cdot x^4 - 0.004635 \cdot x^3 + 0.127 \cdot x^2 - 1.424 \cdot x + 15, \quad x \in [0\,;40]$$

beträgt $s \approx 44.3$m.

## 3.5.2. Überlandleitung

Aufgabenstellung:

Eine Kabel wird so an mehreren 10m hohe Masten befestigt, dass der (maximale) Durchhang jeweils 1m beträgt.




In jedem Abschnitt kann die Seilkurve durch die Gleichung

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - b$$

beschrieben werden, wobei sich die senkrechte y–Achse und der tiefste Punkt des Kabels dann genau zwischen den beiden Masten befinden.

a) Wie lautet die Gleichung der Seilkurve unter Berücksichtigung der Angabe–werte?

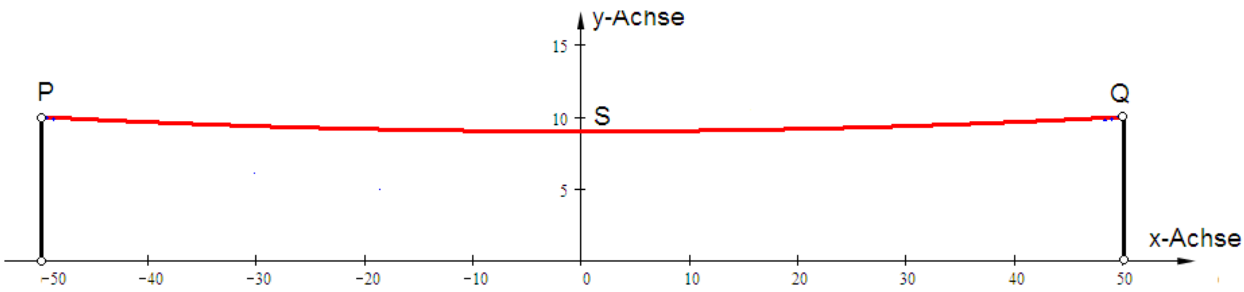
b) Wie lange ist das zwischen zwei Masten befestigte Kabelstücks?

c) Wie groß ist der Durchhang zwischen zwei Masten wenn die Kabellänge aufgrund eines Montagefehlers um 1% erhöht ist?

Verwende zur Lösung die Maße aus der Skizze.

Lösung:

a) Nach Wahl des Koordinatensystem laut Skizze




erhält man die Aufhängepunkte P(–50/10), Q(50/10) und den tiefsten Punkt S(0/9). Einsetzen von Q und S in die Kurvengleichung liefert das Gleichungssystem

$$10 = a \cdot \cosh\left(\frac{50}{a}\right) - b$$

$$9 = a \cdot \cosh\left(\frac{0}{a}\right) - b \quad \Rightarrow \quad b = a - 9$$

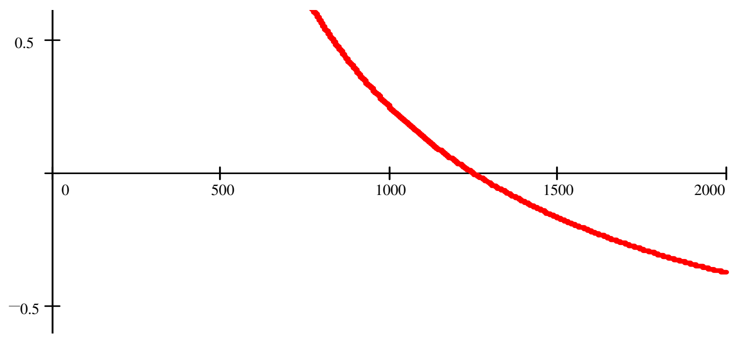
Durch Einsetzen erhält man die nichtlineare Gleichung

$$10 = a \cdot \cosh\left(\frac{50}{a}\right) - (a-9) \quad \Rightarrow \quad 0 = a \cdot \cosh\left(\frac{50}{a}\right) - a - 1$$

Die Lösung wird mithilfe eines CAS ermittelt. Um einen geeigneten Startwert für die Näherungsrechnung zu erhalten wird zuerst eine Funktion

$$n(a) = a \cdot \cosh\left(\frac{50}{a}\right) - a - 1$$

definiert, deren Nullstelle die gesuchte Lösung ist und diese graphisch dargestellt.



Aus dem Diagramm wird der Startwert a=1250 abgelesen. Die Rechnung in MathCad ergibt

$$a = 1250 \qquad a_0 = wurzel\left( a \cdot \cosh\left( \frac{50}{a} \right) - a - 1, a \right) \qquad a_0 = 1250.166775582$$

Für die weitere Rechnung geben wir uns mit der Näherung a≈1250 zufrieden und erhalten wegen

$$b = 1250 - 9 = 1241$$

die Seilkurve als

$$y = 1250 \cdot \cosh\left( \frac{x}{1250} \right) - 1241$$

Als Genauigkeitskontrolle kontrolliert man, wie weit die Angabepunkte von der Kurve entfernt liegen. Einsetzen von x=0 liefert exakt y(0)=9. Einsetzen von x=50 zeigt mit y(50)≈10.00013 im Vergleich zur exakten Höhe 10 eine recht gute Genauigkeit.

b) Die Bogenlänge einer Kurve f im Intervall [l;r] wird mittels

$$s_{[l,r]} = \int_l^r \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

berechnet. Aufgrund der Symmetrie der Seilkurve erhält man mit

$$y = 1250 \cdot \cosh\left( \frac{x}{1250} \right) - 1241 \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh\left( \frac{x}{1250} \right)$$

das Integral

$$s_{[-50;50]} = 2 \cdot \int_0^{50} \sqrt{1 + \sinh^2\left( \frac{x}{1250} \right)}\, dx = 2 \cdot \int_0^{50} \cosh\left( \frac{x}{1250} \right) dx = 2500 \cdot \sinh\left( \frac{x}{1250} \right)\Bigg|_0^{50} \approx 100.027$$

Damit ist ein zwischen zwei Masten fixiertes Kabel, welches auf 100m nur 1m Durchhang (1%) aufweist tatsächlich nur etwa 100.03m lang. Das entspricht einer Verlängerung um nur 3cm oder von etwa 0.023%.

c) Erhöht man die Kabellänge um 1%, dann ergibt sich eine neue Seilkurve

$$y = \bar{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{\bar{a}}\right) - \bar{b}$$

mit neuer Länge

$$\bar{s} = 101.0303$$

und größerem Durchhang. Diese Kurve wird daher durch folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10 &= \bar{a} \cdot \cosh\left(\frac{50}{\bar{a}}\right) - \bar{b} \\ 101.0303 &= 2 \cdot \int_0^{50} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{\bar{a}}\right)} dx \end{aligned}$$

festgelegt, das wir näherungsweise mit der Keplerschen Fassregel lösen. Die An– näherung ist zulässig, da sich Kettenlinie und Parabel nur wenig unterscheiden. Aus

$$\int_l^r g(x)dx \approx \frac{r-l}{6} \cdot \left( g(a) + g(b) + 4 \cdot g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

erhält man für die zweite Gleichung

$$101.0303 \approx \frac{50-(-50)}{6} \cdot \left( \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{-50}{\bar{a}}\right)} + \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{50}{\bar{a}}\right)} + 4 \cdot \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\frac{50+(-50)}{2}}{\bar{a}}\right)}\right)$$

welche weiter zu

$$6.06 = 2 \cdot \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{50}{\bar{a}}\right)} + 4 \cdot \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{0}{\bar{a}}\right)} \qquad 1.03 = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{50}{\bar{a}}\right)}$$

führt.

Daher ergibt sich mit

$$\bar{a} = \frac{50}{ar\sinh\left(\sqrt{0.0609}\right)} \approx 205 \qquad \bar{b} = \bar{a} \cdot \cosh\left(\frac{50}{\bar{a}}\right) - 10 \approx 201$$

die Lösungsfunktion

$$y = 205 \cdot \cosh\left(\frac{x}{205}\right) - 201$$

Die tiefste Stelle liegt wieder bei x=0. Dort ist y(0)=4, d.h. das Seil hängt 6m durch.

Zur Kontrolle bestimmt man ausgehend von der neuen Funktion analog wie in b) wieder die Seillänge

$$s_{[-50,50]} = 2 \cdot \int_0^{50} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{205}\right)}dx \approx 100.9944$$

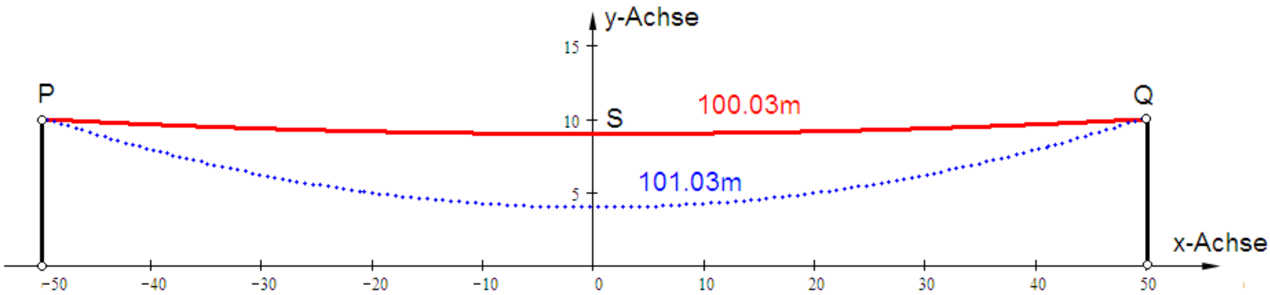
womit das Ergebnis im Rahmen der notwendigen Genauigkeit gut abgesichert ist.

Antwort:

Die Gleichung der Seilkurve (Durchhang 1m) lautet

$$y = 1250 \cdot \cosh\left(\frac{x}{1250}\right) - 1241$$

und die Kabellänge beträgt dann etwa 100.03m. Wird das Kabel um nur 1% verlängert, dann beträgt der Durchhang etwa 6m.



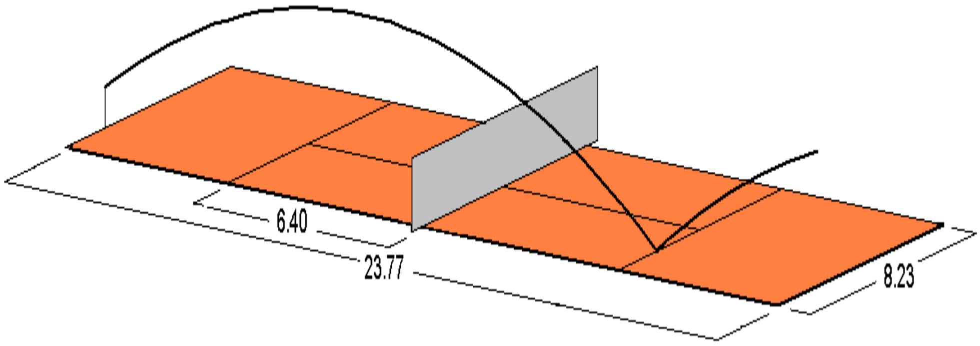
### 3.5.3. Geschwindigkeit eines Tennisballs

Aufgabenstellung:

Wird ein Tennisball auf der Grundlinie in 0.6m Höhe so getroffen, dass er parallel zum Feldrand das Netz in 2.0m Höhe überquert und das gegnerische Feld auf der Auf– schlaglinie trifft, dann wird die Flugbahn durch die Funktion

$$f(x) = -0.024 \cdot x^2 + 0.397 \cdot x + 0.6$$

beschrieben.




a) Welchen Weg legt der Ball (eigentlich der Schwerpunkt des Balls) zurück?

b) Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat der Ball, wenn die Flugzeit etwa 1.5 Sekunden beträgt?

c) Wie schnell müsste der Tennisspieler (ohne Berücksichtigung des Netzes) durchschnittlich laufen, wenn er den Ball auf der Grundlinie anspielt und danach auf der gegnerischen Aufschlaglinie den Ball wieder anspielen wollte?

Lösung:

a) Die Bogenlänge einer Kurve f im Intervall [l;r] wird mittels

$$s_{[l,r]} = \int_l^r \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

berechnet. Mit den Integrationsgrenzen l=0 und

$$r = 23.77 - \left( \frac{23.77}{2} - 6.40 \right) = 18.285$$

sowie der ersten Ableitung

$$f(x) = -0.024 \cdot x^2 + 0.397 \cdot x + 0.6 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -0.048 \cdot x + 0.397$$

lautet die vom Ball zurückgelegte Wegstrecke

$$s_{[0,18.285]} = \int_0^{18.285} \sqrt{1 + (-0.048 \cdot x + 0.397)^2}\, dx \; .$$

Das unbestimmte Integral wird in einer Nebenrechnung ermittelt:

Die Substitution

$$\sinh(u) = -0.048 \cdot x + 0.397 \quad \Rightarrow \quad \cosh(u) \cdot \frac{du}{dx} = -0.048$$

vereinfacht das Integral

$$\int \sqrt{1 + (-0.048 \cdot x + 0.397)^2}\, dx = \frac{-1}{0.048} \cdot \int \sqrt{1 + \sinh^2(u)} \cdot \cosh(u) \cdot du = \frac{-125}{6} \cdot \int \cosh^2(u) \cdot du$$

und durch partielle Integration erhält man mit

$$\begin{aligned} \int \cosh^2(u) \cdot du &= \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \sinh^2(u) du = \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \sinh^2(u) du = \\ &= \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \cosh^2(u) - 1 du = \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \cosh^2(u) - 1 du = \\ &= (\sinh(u) \cdot \cosh(u) + u) - \int \cosh^2(u) du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int \cosh^2(u) \cdot du = \frac{\sinh(u) \cdot \cosh(u) + u}{2} + C$$

schließlich

$$\int \sqrt{1 + (-0.048 \cdot x + 0.397)^2}\, dx = \ldots = \frac{-125}{12} \cdot (\sinh(u) \cdot \cosh(u) + u) + C$$

Damit ist die Nebenrechnung beendet.

Bei der Substitution

$$\sinh(u) = -0.048 \cdot x + 0.397$$

ändern sich die Grenzen zu

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \Rightarrow & u = ar\sinh(-0.048 \cdot 0 + 0.397) \approx 0.387 \\ x = 18.285 & \Rightarrow & u = ar\sinh(-0.048 \cdot 18.285 + 0.397) \approx -0.464 \end{array}$$

und damit ergibt sich insgesamt

$$s_{[0,18.285]} = \int_{0}^{18.285} \sqrt{1 + (-0.048 \cdot x + 0.397)^2}\, dx = \frac{-125}{12} \cdot [\sinh(u) \cdot \cosh(u) + u]_{-0.464}^{0.387} \approx 37.741$$

Damit legt der Ball während seiner Flugphase etwa 37.7m zurück.

b) Bei einer Flugdauer von 1.5 Sekunden beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{37.74\ m}{1.5\ \mathrm{sec}} \approx 25.16 \frac{m}{\mathrm{sec}} \approx 90.6 \frac{km}{h}.$$

c) Spielt ein Tennisspieler den Ball zur gegnerischen Aufschlaglinie und läuft dann zur gegnerischen Aufschlaglinie so, dass er den Ball dort wieder spielen kann, dann hat er den Weg von 18.285m in 1.5 Sekunden zurücklegt. Dann hat er mit einer Geschwindigkeit von „nur"

$$v_{Spieler} = \frac{18.285\ m}{1.5\ \mathrm{sec}} = 12.19 \frac{m}{\mathrm{sec}} \approx 43.9 \frac{km}{h}.$$

zu laufen (unter Vernachlässigung des Netz als Hindernis, der Drehung zum Ball, ... ). Dabei handelt es sich um die Maximalgeschwindigkeit von 100m–Sprintern.

<u>Antwort:</u>

Die Flugbahn ist etwa 37.7m lang; der Ball erreicht im Flug eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 90.6 km/h. Der Spieler müsste dem Ball mit 43.9 km/h „nachlaufen".

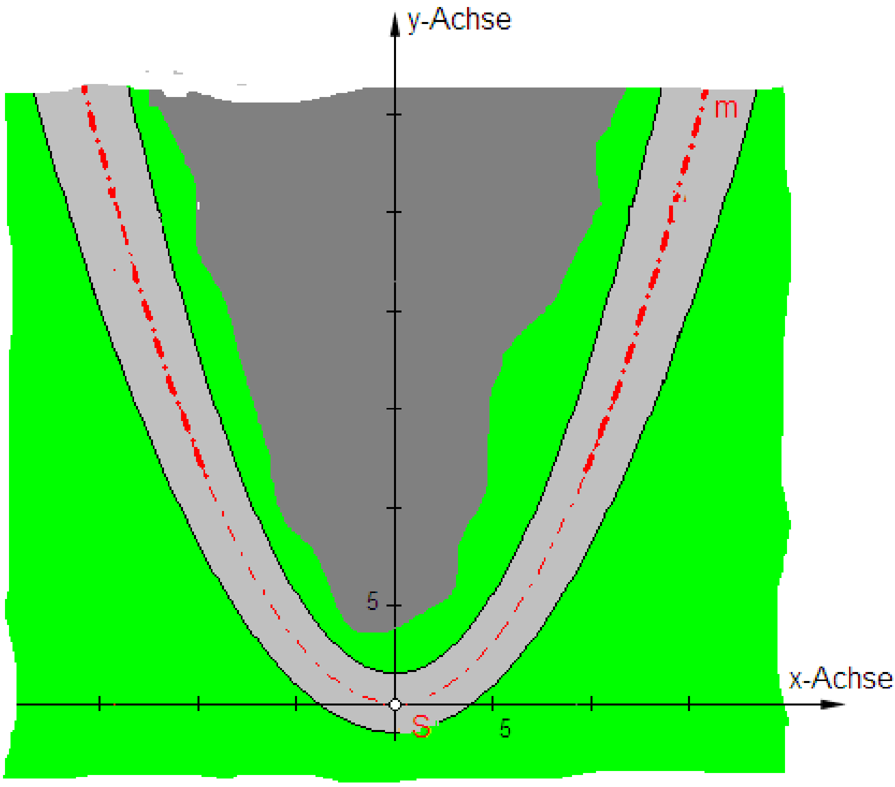
### 3.5.4. Ampelregelung einer engen Kurve

<u>Aufgabenstellung:</u>

Die (gedachte) Mittellinie m einer Kurve wird näherungsweise durch die Funktion

$$y = 0.125 \cdot x^2, \quad x \in [-20\,;\,20]$$

beschrieben.




Da sich die Kurve im Bereich des Scheitels verengt und aufgrund der Geländeform die Sicht in die Kurve hinein eingeschränkt ist, sollen 30m vom Kurvenscheitel entfernt zwei über der Straßenmitte hängenden Ampeln aufgestellt werden.

a) Wo müssen die Ampeln (bezüglich des x–y–Systems) angebracht werden?

b) Wie lange benötigt ein PKW zum Passieren der Kurve, wenn er die Strecke von Ampel zu Ampel mit durchschnittlich 25 km/h zurücklegt?

Lösung:

a) Die Bogenlänge einer Kurve f im Intervall [l;r] wird mittels

$$s_{[l,r]} = \int_l^r \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

berechnet.

Der Scheitel der Kurve lautet S=(0/0). Aufgrund der Symmetrie von f genügt es, die Position von Ampel und Sperrlinie an einem Kurvenausgang zu berechnen. Die andere Position liegt symmetrisch bezüglich der y–Achse.

Mit den Integrationsgrenzen l=0 und gesuchtem r sowie der ersten Ableitung

$$f(x) = 0.125 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.25 \cdot x$$

lautet die Wegstrecke

$$s_{[0,r]} = \int_0^r \sqrt{1+(0.25 \cdot x)^2}\,dx = 30 \quad .$$

Das unbestimmte Integral wird in einer Nebenrechnung ermittelt:

Die Substitution

$$\sinh(u) = 0.25 \cdot x \quad \Rightarrow \quad \cosh(u) \cdot \frac{du}{dx} = 0.25$$

vereinfacht das Integral

$$\int \sqrt{1+(0.25 \cdot x)^2}\,dx = \frac{1}{0.25} \cdot \int \sqrt{1+\sinh^2(u)} \cdot \cosh(u) \cdot du = 4 \cdot \int \cosh^2(u) \cdot du$$

und durch partielle Integration erhält man mit

$$\begin{aligned}\int \cosh^2(u) \cdot du &= \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \sinh^2(u)du = \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \sinh^2(u)du = \\ &= \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \cosh^2(u) - 1du = \sinh(u) \cdot \cosh(u) - \int \cosh^2(u) - 1du = \\ &= \left(\sinh(u) \cdot \cosh(u) + u\right) - \int \cosh^2(u)du\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int \cosh^2(u)\cdot du = \frac{\sinh(u)\cdot\cosh(u)+u}{2}+C$$

schließlich

$$\int \sqrt{1+(0.25\cdot x)^2}\,dx = \ldots = 2\cdot(\sinh(u)\cdot\cosh(u)+u)+C$$

Damit ist die Nebenrechnung beendet.

Bei der Substitution sinh(u)=0.25·x ändern sich die Grenzen zu

$$\begin{aligned} x=0 \quad &\Rightarrow \quad u = ar\sinh(0.25\cdot 0) = 0 \\ x=r \quad &\Rightarrow \quad u = ar\sinh(0.25\cdot r) \end{aligned}$$

und damit ergibt sich insgesamt

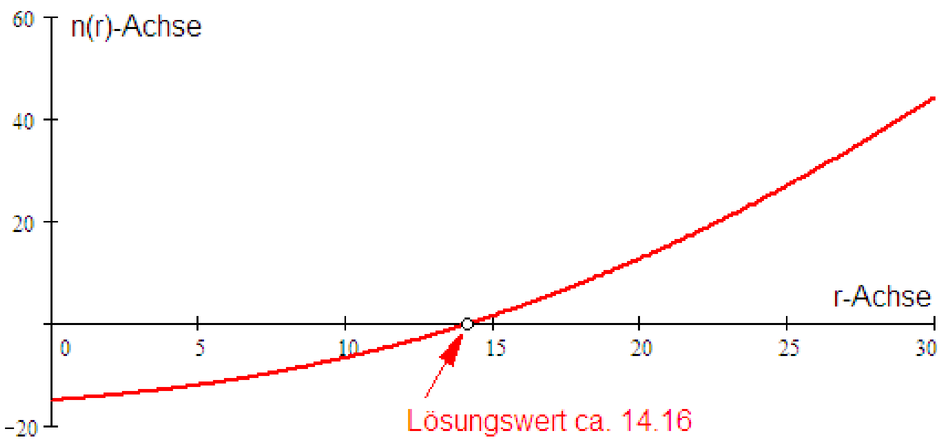
$$30 = \int_0^r \sqrt{1+(0.25\cdot x)^2}\,dx = 2\cdot[\sinh(u)\cdot\cosh(u)+u]_0^{ar\sinh(0.25\cdot r)} = \ldots$$

$$\ldots = 2\cdot\left[0.25\cdot r\cdot\sqrt{1+(0.25\cdot r)^2} + ar\sinh(0.25\cdot r)\right]$$

Diese nichtlineare Gleichung wird näherungsweise gelöst. Die Funktion

$$n(r) := 0.25\cdot r\cdot\sqrt{1+(0.25\cdot r)^2} + \operatorname{arsinh}(0.25\cdot r) - 15$$

gewinnt, deren Nullstelle die gesuchte Lösung ist.




Diese wird mithilfe des CAS MathCad berechnet:

$$r = 15 \qquad wurzel\left[0.25 \cdot r \cdot \sqrt{1+(0.25\cdot r)^2} + ar\sinh(0.25\cdot r) - 15, r\right] = 14.161$$

Wir verwenden ab jetzt die Näherung $x \approx 14.2$. Für die y-Koordinate erhalten wir daher $y \approx 0.125 \cdot 14.2^2 = 25.2$.

Zur Kontrolle berechnet man die Wegstrecke zwischen $A_1$ und $A_2$. Diese beträgt

$$s_{[-14.2, 14.2]} = \int_{-14.2}^{14.2} \sqrt{1+(0.25\cdot x)^2}\, dx \approx 60.3$$

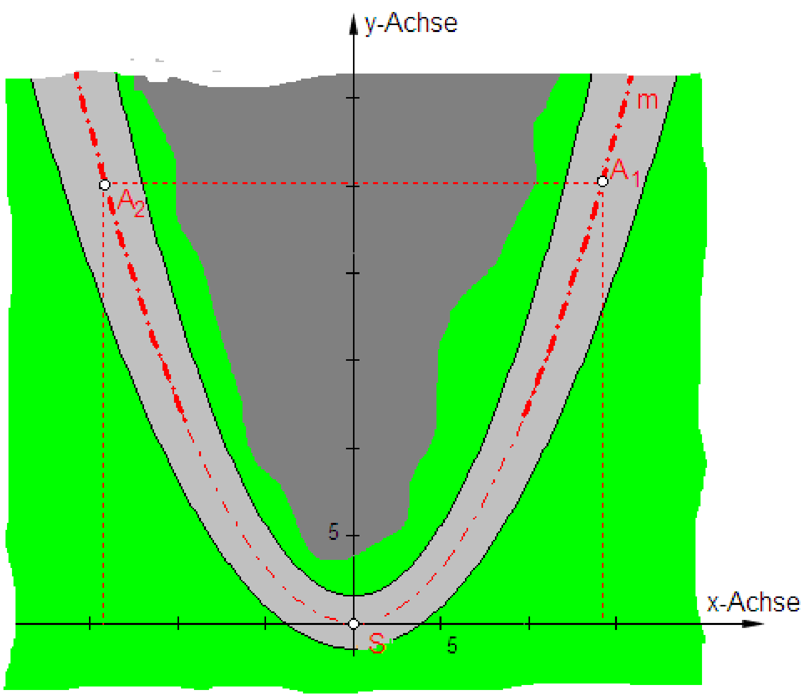
Die Ampeln sind in den Punkten $A_1=(14.2/25.2)$ und $A_2=(-14.2/25.2)$ anzubringen.

b) Bei durchschnittlicher Geschwindigkeit 25km/h dauert das Zurücklegen der Strecke

$$t = \frac{60.3\ m}{25\ km/h} \approx \frac{60.3\ m}{7\ m/\sec} \approx 8.6 \sec.$$

<u>Antwort:</u>

Die Ampeln sind in den Punkten $A_1=(14.2/25.2)$ und $A_2=(-14.2/25.2)$ anzubringen. Für das Zurücklegen der Strecke zwischen den beiden Ampeln benötigt ein durchschnittlich 25km/h schnell fahrender PKW etwa 9 Sekunden.



# 4. Anhang

## 4.1. Quellennachweis

Die geschichtlichen Informationen im Abschnitt „Vorwort“ wurden entnommen:

Kaiser, Hans; Nöbauer, Wilfried: Geschichte der Mathematik. Oldenburg 2002

Die Abschnitte „Kurzabriss Theorie“ entstanden in Anlehnung an:

Timischl, Wolfgang; Kaiser, Gerald: Ingenieur-Mathematik 3. Dorner 1999

Alle Abbildungen wurden von mir selbst erzeugt.

## 4.2. Abstract

**Titel:** Anwendungen der Differential- und Integralrechnung in der Mathematik, der Physik und in anderen Gebieten (Gymnasium und HTL)

**Verfasserin:** Sabrina Langer

**Betreuer:** Mag. Dr. Andreas Ulovec

**Stichworte:** Differentialrechnung, Integralrechnung, Schulmathematik, Anwendungen

**Abstract:** Diese Diplomarbeit behandelt die Anwendung der Differential– und Integralrechnung im Schulunterricht.

In beiden Teilen wird zuerst der Lehrplanbezug hergestellt und nach einer kurzen Erläuterung der Theorieinhalte auf die Beispiele eingegangen.

Im ersten Teil werden Anwendungen der Differentialrechnung in den Bereichen Differenzen– und Differentialquotient, Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben vorgestellt.

Im zweiten Teil werden Anwendungen der Integralrechnung in den Bereichen Mittelwert, Volumen und Weglänge vorgestellt.

## 4.3. Lebenslauf

| | |
|---|---|
| Name: | Sabrina Langer |
| Geburtsdatum: | 5. April 1984 |
| Geburtsort: | Mödling |
| Name der Eltern: | Fritz und Viktoria |
| Staatsangehörigkeit: | Österreich |
| Adresse: | Ortsstraße 38/4/1<br>A-2331 Vösendorf |

| | | |
|---|---|---|
| Schulbildung: | 1990-1994 | Volksschule Vösendorf |
| | 1994-1998 | Bundesgymnasium Bachgasse, Mödling |
| | 1998-2003 | HTL Mödling, Fachrichtung Elektronik |
| | 2003 | Matura (guter Erfolg) |
| | 2003-2009 | Lehramtsstudium Mathematik und<br>Lehramtsstudium Physik, UNI Wien |